

SÉRIE A, n° 4011

N° D'ORDRE

4862

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

Aline SURIN née PARLANGE

1^{re} THÈSE. — ÉTUDE DU SCHÉMA FLUIDE PARFAIT ET DES ÉQUATIONS DE MOUVEMENT
DANS LES THÉORIES PENTADIMENSIONNELLES DE JORDAN-THIRY ET
DE KALUZA-KLEIN.

2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 22 février 1963 devant la Commission d'examen.

M. LICHNEROWICZ

Président.

M^{me} M.-A. TONNELAT

M^{me} Y. CHOQUET-BRUHAT

Examineurs.

M. Y. THIRY

PARIS

GAUTHIER-VILLARS & C^{ie}, IMPRIMEUR-ÉDITEUR

55, quai des Grands-Augustins

—
1965

SÉRIE A, N° 4011

N° D'ORDRE

4862

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

Aline SURIN née PARLANGE

1^{re} THÈSE. — ÉTUDE DU SCHÉMA FLUIDE PARFAIT ET DES ÉQUATIONS DE MOUVEMENT
DANS LES THÉORIES PENTADIMENSIONNELLES DE JORDAN-THIRY ET
DE KALUZA-KLEIN.

2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 22 février 1963 devant la Commission d'examen.

M. LICHNEROWICZ

Président.

M^{me} M.-A. TONNELAT

M^{me} Y. CHOQUET-BRUHAT

M. Y. THIRY

} *Examineurs.*

PARIS

GAUTHIER-VILLARS & C^{ie}, IMPRIMEUR-ÉDITEUR

55, quai des Grands-Augustins

—
1963

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

PROFESSEURS

Doyen..... M. ZAMANSKY.

G. JULIA	T	Analyse supérieure et Algèbre supérieure.	FELDMANN	T	Biologie végétale marine.
PRENANT	T	Anatomie et Histologie comparée.	GUINIER	T	Physique des Solides (Orsay).
GRASSE	T	Évolution des Êtres organisés.	JOST	T	Physique comparée.
PRÉVOST	T	Chimie organique.	FORTET.....	T	Calcul des Probabilités et Physique mathématique.
WYART	T	Minéralogie et Cristallographie.	SCHWARTZ	T	Calcul différentiel et intégral.
TEISSIER	T	Zoologie.	CHOUARD	T	Physiologie végétale.
MANGENOT	T	Biologie végétale (Orsay).	MALAVARD	T	Aviation (Technique aéronaut.).
AUGER	T	Physique quantique et Relativité.	BRELOT.....	T	Calcul différentiel et intégral.
MONNIER	T	Physiologie générale.	NORMANT	T	Chimie organique.
PIVETEAU.....	T	Paléontologie.	BÉNARD	T	Chimie minérale.
ROCARD	T	Physique (E. N. S.).	HUVAT	T	Botanique (E. N. S.).
CARTAN	T	Mathématiques (E. N. S.).	DUGUÉ	T	Statistiques mathématiques.
LAFFITTE	T	Chimie générale.	SOULAIRAC	T	Psychophysiologie.
FAVARD	T	Géométrie supérieure.	ULRICH	T	Physiologie végétale.
COULOMB	T	Physique du Globe.	MARÉCHAL	T	Optique théorique et appliquée.
M ^{lle} COUSIN	T	Biologie animale (S. P. C. N.).	KIRRMANN	T	Théories chimiques.
DRACH	T	Chimie minérale.	CHADEFAUD	T	Botanique.
KASTLER	T	Zoologie.	M ^{lle} LE BRETON ..	T	Physiologie de la nutrition.
EPHROSSI	T	Physique (E. N. S.).	SALEM	T	Mathématiques générales.
RIVIÈRE	T	Génétique.	LELONG	T	Application de l'analyse à la géométrie.
GAUTHIERET	T	Géologie S. P. C. N. et Sédim.	DEVILLERS	T	Anatomie et Histologie comparée.
LUCAS R.....	T	Biologie végétale (P. C. B.).	EHRESMANN.....	T	Topologie algébrique.
THOMAS A.	T	Recherches physiques.	FRANÇON	T	Physique (S. P. C. N.).
ARNULF	T	Biologie cellulaire.	GLANGEAUD	T	Géographie physique et Géologie dynamique.
MORAND	T	Optique appliquée.	GODEMENT	T	Mathématiques (M. P. C.).
SOLEILLET	T	Physique Enseignement.	PISOT	T	Technique mathématique de la Physique.
FORTIER	T	Physique (P. C. B.).	ROCH	T	Géologie.
DANJON	T	Mécanique expérimentale des Fluides.	SCHATZMAN	T	Astrophysique.
PETIT	T	Astronomie.	TERMIER	T	Paléontologie stratigraphique.
QUESNEY	T	Biologie maritime.	ZAMANSKY	T	Mathématiques générales.
GALLIEN	T	Météorologie et dynamique atmosphérique.	LENNUEY	T	Physique (M. G. P.).
EICHORN	T	Embryologie.	RIZET	T	Génétique.
DE CUGNAC	T	Botanique.	ROUTHIER	T	Géologie appliquée.
M ^{lle} CAUCHOIS	T	Biologie végétale (S. P. C. N.).	M ^{me} TONNELAT ..	T	Physique théorique.
TRELLIER	T	Chimie physique.	DIXMIER.....	T	Mathématiques (M. P. C.).
L'HERTIER	T	Physique du Globe.	SOUCHAY	T	Chimie générale.
GRIVET	T	Biologie générale (Orsay).	AIGRAIN	T	Électrotechnique générale.
PONCIN	T	Radioélectricité (Orsay).	BRUSSET	T	Chimie systématique.
DUBREIL	T	Mécanique générale.	M. LEVY	T	Physique théorique des Hautes Énergies (Orsay).
QUELET	T	Arithmétique et Théorie des Nombres.	M ^{me} CHAIX	T	Chimie biologique.
CAGNIARD	T	Chimie organique.	M ^{me} HUREL-PY ..	T	Biologie végétale (P. O. B.).
CHAMPETIER	T	Géophysique appliquée.	PIAUX	T	Chimie (M. P. O.).
CUVILLIER	T	Chimie macromoléculaire.	BRUN	T	Mécanique théorique des Fluides.
JUNG	T	Micropaléontologie.	LEDERER	T	Chimie biologique.
TRILLAT.....	T	Pétrographie.	M ^{me} DUBREIL	T	Mathématique (Agrégation).
WIEMANN.....	T	Microscopie et diffraction électronique.	M ^{me} LELONG.....	T	Mathématiques II (E. N. S.).
JACQUINOT	T	Chimie organique et structurale.	BELLAIR	T	Géologie (S. P. C. N.).
VASSY	T	Spectroscopie et Physique céleste (Orsay).	COTTE	T	Physique Électricité.
DESTOUCHES	T	Physique de l'Atmosphère.	DUBOIS J. E.....	T	Chimie organique.
AMIEL	T	Théories physiques.	LAMOTTE	T	Zoologie (E. N. S.).
HOCART	T	Chimie générale.	MICHEL A.....	T	Chimie minérale (Orsay).
J. P. MATHIEU	T	Chimie minérale.	OLMER	T	Énergétique générale.
COUTEAUX	T	Minéralogie et Cristallographie.	ROUAULT	T	Électricité (Orsay).
MAY	T	Physique Optique.	GAUTHIER	T	Mécanique appliquée.
CHOQUET	T	Biologie animale (P.C.B.).	BARCHIEWITZ	T	Chimie physique.
	T	Zoologie (Orsay).	BRUSSEL	T	Physique atomique.
	T	Théorie des fonctions et Topologie.	BUSER.....	T	Physiologie comparée.



CAMUS.....	T	Physiologie végétale (B. M. P. V.).	HELLER.....	T	Physiologie végétale.
CASTAING.....	T	Physique II Thermod. (Orsay).	TORTRAT.....	T	Calcul des Probabilités.
CURIEN.....	T	Minéralogie et Cristallographie.	CAILLEUX.....		Géologie (S. P. C. N.).
MOYSE.....	T	Physiologie végétale (Orsay).	MAGNAN.....	T	Physique S. P. C. N.
NOIROT.....	T	Évolution des Êtres organisés.	DAUDEL.....	T	Mécanique ondulatoire appliquée à la Chimie théorique et à la Physique nucléaire.
PANNETIER.....	T	Chimie générale.			Biologie végétale (S. P. C. N.).
POSSOMPES.....	T	Zoologie.	M ^{lle} FOURCROY.....		
PULLMANN.....	T	Chimie quantique.	M ^{me} CHOQUET- BRUHAT.....	T	Mécanique analytique et Méca- nique céleste.
TEILLAC.....	T	Physique nucléaire et Radio- activité.	M ^{lle} VEIL.....		Physiologie générale.
			LWOFF.....	T	Microbiologie.
TONNELAT.....	T	Biologie physicochimique.	SIESTRUNCK.....	T	Mécanique physique et expéri- mentale.
VILLE.....	T	Économétrie.			
WILLEMART.....	T	Chimie (P. C. B.).	LACOMBE.....	T	Métallurgie des métaux nucléaires.
DODE.....	T	Chimie (Orsay).	BROCHARD.....	T	Physique P. C. B. (Orsay).
FREYMAN.....	T	Recherches physiques.	CABANNES.....	T	Mécanique générale.
GUINOCHET.....	T	Biologie vég. S. P. C. N. (Orsay).	LESIEUR.....	T	Mathématiques I (Orsay).
ROLLET.....	T	Chimie minérale.	MAZET.....	T	Mécanique générale (Orsay).
M ^{lle} JOSIEN.....	T	Chimie S. P. C. N.	CAIRE.....		Géographie physique et Géologie dynamique.
CHEVALLEY.....	T	Géométrie algébrique et théorie des groupes.			
			COMOLET.....	T	Mécanique des Fluides.
ARNOULT.....	T	Électronique (Orsay).	CORABOEUF.....		Physiologie animale (Orsay).
CHAPELLE.....	T	Physique (Orsay).	DELLOUE.....		Physique de l'exosphère.
DELANGE.....	T	Mathématiques I (Orsay).	GORENFLOT.....		Botanique II (Orsay).
DENY.....	T	Mathématiques générales (Orsay).	HOUILLON.....		Biologie animale P. C. B.
GERMAIN.....	T	Mécanique théorique des Fluides.	JULLEN J.....		Chimie S. P. C. N. (Orsay).
LUCAS G.....	T	Géologie.	MAIGRANGE.....	T	Technique mathématique de la Physique (Orsay).
ALLARD.....	T	Chimie physique.			
BERTHELOT.....	T	Physique des particules fonda- mentales.	OLIVIER.....		Anthropologie.
BRICARD.....	T	Météorologie et Physique de l'Atmosphère.	NOZERAN.....	T	Botanique II (Orsay).
			BLANC-LAPIERRE ..	T	Physique E. N. S. (Orsay).
M ^{me} ALBE-FESSARD.	T	Psychophysiologie.	CHEVAUGEON ..	T	Botanique (Orsay).
FRIEDEL.....	T	Physique des Solides (Orsay).	KAHANE.....		Mathématiques (Orsay).
M. JULIA.....	T	Études des Moléculaires naturelles complexes.	SAMUEL.....	T	Mathématiques E. N. S. féminines.
			KOURGANOFF.....	T	Astronomie (Orsay).
LENDER.....	T	Biologie animale S. P. C. N. (Orsay).	THIRY.....	T	Mécanique céleste.
MAGAT.....	T	Physicochimie des radioéléments.	ABELES.....		Physique S. P. S. C. N.
M ^{lle} QUINTIN.....	T	Électrochimie.	AMAT.....		Physique P. C. B.
MONOD.....	T	Chimie du métabolisme.	AUBON.....		Géologie.
BENOIT.....	T	Physiologie animale (Orsay).	M ^{me} BENOIT- GUETAL ..		Physique nucl. et radioactivité.
DE POSSEL.....	T	Analyse numérique.	BOUGIS.....		Biologie marine (Villefranche- sur-mer).
CHARLOT.....	T	Chimie analytique.			
LEMÉE.....	T	Physiologie végétale B. M. P. V. (Orsay).	BRUHAT.....	T	Mathématiques M. P. C.
			BRUNN.....	T	Géologie historique (Orsay).
GUÉRIN.....	T	Chimie M. P. C. (Orsay).	CHABBAL.....		Physique M. G. P. (Orsay).
CHATELET M.....	T	Chimie P. C. B.	DEHEUVELS.....	T	Mathématique propéd. (Orsay).
JEAN.....	T	Physique nucléaire (Orsay).	D'ESPAGNAT.....		Physique théorique (Orsay).
MATTIER.....	T	Physique S. P. C. N.	FURON.....		Géologie S. P. C. N.
BERGERARD.....	T	Zoologie (Orsay).	M ^{me} GANS.....	T	Génétique.
BERTIN.....	T	Électronique (Orsay).	GENEVES.....		Biologie végétale P. C. B.
BOUSSIÈRES.....		Chimie des radioéléments (Orsay).	GUILBERT.....		Physique (O. U. S. Orléans).
M ^{me} COUTURE.....	T	Thermodynamique et Mécanique physique.	HUPE.....		Pétrographie.
			HOLLANDE.....	T	Biologie générale.
ELLENBERGER.....	T	Géologie des grandes régions du Globe.	LIONS.....	T	Analyse numérique.
			MAITTE.....		Chimie P. C. B.
FRANC.....	T	Biologie animale P. C. B.	MEYER.....		Physique propédeutique.
SCHNELL.....		Botanique tropicale (Orsay).	NICOLAS.....		Géologie appliquée.
STOLKOWSKI.....	T	Physiologie végétale.	PANTIGEL.....		Biologie générale.
ACHER.....		Chimie biologique (Orsay).	RAVIER.....		Pétrographie.
BAUDOUIN.....		Biologie animale P. C. B.	ROSEAU.....	T	Mécanique théorique des Fluides.
BEAUMONT.....		Biologie animale S. P. C. N.	ROUBINE.....		Électronique.
BLAUMONT.....	T	Géophysique ionosphère.	SILBER.....	T	Chimie P. C. B.
BOURREAU.....		Botanique.	UEBERSFELD.....	T	Électronique.
CURIE D.....		Physique M. G. P.	YVON.....	T	Théories physiques.
DURAND-DELGA.....	T	Géologie.			
FRÉON.....	T	Chimie organique (Orsay).			

Secrétaire général..... R. POULLAIN.



Digitized by the Internet Archive
in 2026

A MES PARENTS

A MON MARI

A MES ENFANTS

Je suis heureuse d'exprimer ici ma respectueuse gratitude à M^{me} M.-A. Tonnelat qui m'a permis d'entreprendre ce travail, et m'a sans cesse apporté son aide et ses encouragements.

Je suis profondément reconnaissante à M. A. Lichnerowicz pour sa bienveillance, ses conseils et son précieux enseignement.

Je remercie vivement M^{me} Y. Choquet et M. Y. Thiry qui me font l'honneur de faire partie du jury.

Je tiens enfin à témoigner toute ma gratitude à M. H. Villat qui m'a si aimablement accordé de très grandes facilités pour l'impression de ce travail.

ÉTUDE DU SCHÉMA FLUIDE PARFAIT ET DES ÉQUATIONS DE MOUVEMENT DANS LES THÉORIES PENTADIMENSIONNELLES DE JORDAN-THIRY ET DE KALUZA-KLEIN

Par M^{me} Aline SURIN.

INTRODUCTION.

Les théories de la relativité restreinte et de la relativité générale ont permis l'unification du champ électrique et du champ magnétique, en un même hyperchamp représenté par un tenseur antisymétrique. Mais, alors qu'en relativité restreinte, le champ gravitationnel apparaît comme un phénomène non lié à l'espace-temps de Minkowski, il se trouve représenté en relativité générale par le tenseur métrique symétrique de composantes g_{ij} . La relativité générale apparaît satisfaisante en tant que théorie du champ gravitationnel pur; par contre, elle n'est pas une véritable théorie de l'électromagnétisme qui apparaît comme un phénomène superposé à la structure géométrique de la variété riemannienne, cadre géométrique de la relativité générale.

Deux groupes de théories tendent à l'unification du champ gravitationnel et du champ électromagnétique. Les premières ont pour cadre une variété pentadimensionnelle : ce sont les théories de Kaluza [29] ⁽¹⁾, O. Klein [30], P. Jordan [28] et Y. Thiry [33].

(1) Les numéros entre crochets renvoient à la bibliographie.

Les autres ont pour cadre une variété à connexion affine quelconque, quadridimensionnelle.

Dans ce travail, nous nous intéressons au premier groupe de théories unitaires, les théories pentadimensionnelles. Nous utiliserons le formalisme élaboré par A. Lichnerowicz et Y. Thiry, qui a conduit à la théorie appelée théorie de Jordan-Thiry [35].

La structure géométrique de l'univers est celle d'une variété riemannienne à cinq dimensions V_5 , sur laquelle est définie une métrique hyperbolique normale de signature $(+ - - - -)$. De même que la relativité générale généralise la relativité restreinte, la théorie de Jordan-Thiry doit généraliser la théorie de la relativité générale. Étant donnée la nécessité de mettre en évidence une variété riemannienne à quatre dimensions V_4 , qui puisse être interprétée comme cadre de la relativité générale, V_5 est supposée admettre un groupe connexe à un paramètre d'isométries, satisfaisant des hypothèses que nous rappelons au début du premier chapitre. La variété V_4 , espace quotient de V_5 par le groupe d'isométries, devra alors pouvoir être interprétée comme l'espace-temps de la relativité générale. Les équations de champ, qui permettent de déterminer les composantes du tenseur métrique de V_5 , ont été choisies comme une généralisation formelle de celles de la relativité générale. Elles seront donc

$$S_{\alpha\beta} = \Theta_{\alpha\beta}$$

(la constante cosmologique étant supposée nulle), $S_{\alpha\beta}$ désignant les composantes du tenseur d'Einstein symétrique, qui satisfait les identités de conservation

$$D_\alpha S^\alpha_\beta = 0,$$

$\Theta_{\alpha\beta}$ sont les composantes du tenseur d'impulsion-énergie, qui doit représenter la distribution de masses et de charges. Les équations de champ sont linéaires par rapport aux dérivées secondes des potentiels et présentent le caractère hyperbolique normal.

Les équations de champ, écrites en termes de V_4 , peuvent se séparer en trois groupes :

le premier peut être comparé aux équations de champ de la relativité générale,

le deuxième généralise les équations de Maxwell de l'électromagnétisme classique,

et enfin une dernière équation détermine γ_{00} . Tous les potentiels ont alors une interprétation physique, sauf γ_{00} , qui malheureusement ne semble pas présenter une signification immédiate. Dans cette théorie, les équations de Maxwell se déduisent des équations de champ : c'est, en opposition à la théorie provisoire de l'électromagnétisme, que cette théorie est dite unitaire.

Si γ_{00} est supposé constant, les deux premiers groupes d'équations sont rigoureusement les équations de la théorie provisoire de l'électromagnétisme, mais la variable γ_{00} n'est pas solution de l'équation susceptible de la déterminer.

Une autre théorie, celle de Kaluza-Klein [30], a été élaborée avant la théorie de Jordan-Thiry : elle peut être étudiée dans le même formalisme. Le groupe d'isométries se réduit à un groupe de translations, ce qui entraîne γ_{00} constant. Les équations de champ, déduites d'un principe variationnel, sont alors

$$S\alpha^i = \theta\alpha^i.$$

Elles comprennent les deux premiers groupes des équations de champ de la théorie de Jordan-Thiry signalées plus haut, équations dans lesquelles γ_{00} est supposé constant. La théorie de Kaluza-Klein constitue donc un formalisme équivalent à la théorie provisoire de l'électromagnétisme, et ne se présente pas exactement comme un cas particulier de la théorie de Jordan-Thiry.

Au chapitre I, nous rappelons les fondements de la théorie de Jordan-Thiry; nous utiliserons ces bases dans la suite de ce travail. Les équations de champ du cas extérieur sont écrites en termes de V_4 , munie soit de la métrique quotient, soit de la métrique conforme introduite par F. Hennequin [27].

Au chapitre II, nous écrivons les équations de champ du cas intérieur, en termes de V_4 . La variété est munie successivement des deux métriques signalées dans le chapitre I. En premier lieu, nous avons écrit ces équations sans particulariser le tenseur impulsion-énergie de V_5 , c'est-à-dire, sans nous placer dans un schéma déterminé. En nous rappelant que l'idée directrice fondamentale dans cette théorie est l'interprétation de V_4 comme la variété espace-temps

de la relativité générale, nous obtenons l'interprétation physique de Θ_0^i et Θ^{ij} (les interprétations étant différentes selon la métrique dont est munie V_4): Θ_{00} n'a pas d'interprétation physique, mais dans le schéma fluide parfait, Θ_{00} se calculera à partir des éléments qui déterminent Θ_0^i et Θ^{ij} . Nous essayons ensuite de définir le schéma fluide parfait unitaire, susceptible de généraliser le schéma fluide parfait de la théorie provisoire de l'électromagnétisme; nous obtenons ainsi la forme générale du tenseur impulsion-énergie de V_5 , puisque les composantes contravariantes du vecteur vitesse unitaire de V_5 (relatives aux indices 1, 2, 3, 4), sont proportionnelles à celles du vecteur vitesse unitaire de V_4 . Puis, en identifiant les deux premiers groupes d'équations avec celles de la théorie provisoire dans le schéma fluide parfait chargé, nous interprétons les éléments introduits dans V_5 en éléments fonctions des données physiques ρ , μ et p représentant respectivement la densité de matière, la densité de charge et la pression. Dans la suite, nous supposons que le fluide admet une équation d'état $\rho = \varphi\left(\frac{p}{c^2}\right)$, équation donnée par la physique, ce qui entraîne une relation entre des scalaires de V_4 . Le schéma matière pure a été étudié par Y. Thiry [35]: nous vérifions qu'il apparaît bien comme un cas particulier du schéma fluide parfait. Nous écrivons les conditions de conservation dans ce schéma, et étudions la forme sous laquelle elles se présentent.

Après avoir rappelé les résultats obtenus par A. Lichnerowicz [9], dans l'étude du problème de Cauchy pour les équations de champ du cas extérieur, nous nous proposons de résoudre le même problème pour les équations de champ du cas intérieur, schéma fluide parfait. Les résultats sont analogues à ceux obtenus en relativité générale dans le schéma fluide parfait non chargé, et sont indépendants de la métrique dont est munie V_4 . D'après le théorème établi par Y. Choquet-Bruhat [7], la solution existe et est unique, à un changement de coordonnées près conservant tout point de la surface Σ (portant les données de Cauchy), et les données de Cauchy.

Le tenseur impulsion-énergie étant de la forme

$$\Theta_{\alpha\beta} = r v_\alpha v_\beta - l \gamma_{\alpha\beta},$$

les dérivées partielles premières des composantes covariantes v_α du vecteur vitesse unitaire $\vec{v}$ ainsi que celles de r et de l sont continues

à la traversée de Σ . De plus au voisinage de Σ , les données de Cauchy satisfont aux équations de champ du cas unitaire, et le vecteur $\vec{v}$ est encore unitaire.

Les variétés exceptionnelles sont alors mises en évidence et, entre autres, les ondes hydrodynamiques dont la vitesse de propagation est celle obtenue en hydrodynamique classique par le théorème de Hugoniot et, en relativité générale, dans le schéma fluide parfait non chargé. Les calculs donnés pour l'étude du problème de Cauchy entraînent immédiatement l'invariance de r , l et v_λ par le groupe d'isométries.

Toujours dans le schéma fluide parfait, nous étudions le prolongement de la métrique unitaire extérieure dans la métrique intérieure et inversement.

Enfin, de façon à traduire les conditions de conservation en termes de V_4 , nous calculons en repères orthonormés et en termes de V_4 , $D_{\underline{\beta}} B_{\underline{0}}^{\underline{\beta}}$ et $D_{\underline{\beta}} B_{\underline{t}}^{\underline{\beta}}$, B_{α}^{β} étant les composantes mixtes d'un tenseur de V_5 invariant par le groupe d'isométries. Les conditions de conservation de V_5 auraient pu être obtenues à partir d'identités de V_4 que nous précisons, et des équations de champ de V_5 traduites dans V_4 . Après avoir écrit dans V_4 les conditions de conservation d'un schéma quelconque, nous les écrivons dans le schéma fluide parfait en vérifiant que pour γ_{00} constant, nous obtenons celles de la théorie provisoire de l'électromagnétisme.

Le chapitre III a pour but de trouver une solution des équations de champ (cas extérieur et cas intérieur), par une méthode d'approximation. Nous précisons les hypothèses faites sur le tenseur métrique, et faisons un calcul effectif, en première approximation et en coordonnées isothermes. Ces calculs sont analogues à ceux faits par F. Hennequin [27], mais nous avons démontré que γ_{0A} et γ_{04} ont, en première approximation, un ordre différent de celui choisi *a priori* par F. Hennequin.

Le calcul est particularisé au cas de N domaines présentant la symétrie sphérique. Parallèlement, nous déterminons en première approximation, le tenseur métrique satisfaisant les équations de champ du cas extérieur et les conditions d'isothermie. Nous supposons dans ce calcul que les singularités du champ extérieur sont ponctuelles à symétrie sphérique. En dehors du fait que certaines

constantes peuvent être déterminées en interprétant physiquement le problème (c'est-à-dire en utilisant les équations de champ du cas intérieur), nous devons faire par rapport au calcul précédent, une hypothèse supplémentaire; ce sera, par exemple :

$$\gamma_{04} = O\left(\frac{1}{c^2}\right).$$

La suite de ce travail a pour but d'établir les équations de mouvement par des méthodes généralisant celles de la relativité générale. Les travaux relatifs à cette dernière théorie sont très nombreux et la bibliographie sur ce sujet est incomplète. En théorie de Jordan-Thiry, F. Hennequin a étudié les équations de mouvement par la méthode du tenseur impulsion-énergie et a fait le calcul effectif, en première approximation.

Dans le chapitre IV, nous établissons en théorie de Jordan-Thiry, les équations de mouvement à partir des équations de champ du cas extérieur : c'est une généralisation de la méthode des singularités, établie en relativité générale par Einstein, Infeld, Hoffmann [12], puis approfondie par Pham Tan Hoang [23]. Nous terminons les calculs en première approximation, sous l'hypothèse de N singularités ponctuelles à symétrie sphérique. Les résultats qui sont d'ailleurs identiques à ceux obtenus par la méthode du tenseur impulsion-énergie, pour N domaines présentant la symétrie sphérique, sont en contradiction avec les équations de mouvement en électromagnétisme classique.

Ayant obtenu des résultats inacceptables inhérents à la théorie, il semble naturel de revoir l'interprétation physique de V_4 et, entre autres, le choix de la métrique conforme. Il semble malheureusement, qu'une modification des équations de champ de la théorie de Jordan-Thiry soit nécessaire. Nous établissons le résultat suivant : quel que soit le choix de la métrique conforme à la métrique quotient, il n'est pas possible d'obtenir les équations de champ de la relativité générale, en deuxième approximation, dans le cas gravitationnel pur.

Dans le chapitre V, après avoir rappelé les fondements de la théorie de Kaluza-Klein, nous montrons qu'en repères adaptés, les conditions de conservation sont celles de la théorie de Jordan-Thiry, avec $\xi = 1$. Tous les résultats du chapitre II se transposent immédiatement en théorie de Kaluza-Klein.

Nous démontrons alors que le résultat (établi par F. Hennequin en théorie de Jordan-Thiry) est valable en théorie de Kaluza-Klein, en repères adaptés : compte tenu des équations de champ en coordonnées isothermes, les équations approchées de mouvement sont équivalentes aux conditions approchées d'isothermie.

La méthode du tenseur impulsion-énergie et la méthode des singularités, pour obtenir les équations de mouvement, s'appliquent à la théorie de Kaluza-Klein. Les équations de mouvement obtenues par la première méthode (dans l'hypothèse de N domaines intérieurs à symétrie sphérique), et par la deuxième méthode (dans l'hypothèse de N singularités du champ extérieur, ponctuelles à symétrie sphérique) sont identiques en première approximation : ce sont celles de l'électromagnétisme classique.

Au chapitre VI, les solutions des équations de champ du cas extérieur sont calculées en deuxième approximation, en théorie de Kaluza-Klein. Des fonctions arbitraires de t , introduites dans ce calcul, sont déterminées en utilisant les conditions d'isothermie et deux des équations de mouvement. La difficulté de ce calcul réside dans le choix de la solution d'équations de Laplace avec second membre, solution qu'il est suffisant de déterminer au voisinage de chaque singularité.

Au chapitre VII, de façon à faire progresser les équations de mouvement relativistes, nous écrivons, après de très longs calculs et en deuxième approximation, les équations de mouvement relatives aux N singularités du champ extérieur. Nous vérifions que, dans le cas gravitationnel pur, les équations obtenues sont celles de la relativité générale, déduites des équations de champ du cas extérieur.

NOTATIONS.

$\alpha, \beta, \lambda, \mu$ prennent les valeurs 0, 1, 2, 3, 4

i, j » 1, 2, 3, 4

A_1, B_1 » 0, 1, 2, 3

A, B » 1, 2, 3

x^4 désigne la variable temporelle, (x^A) les variables spatiales.

V_5 est munie de la métrique $d\sigma^2 = \gamma_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$.

V_1 (espace quotient de V_3 par le groupe d'isométries) est munie soit de la métrique $ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j$, avec $g_{ij} = \gamma_{ij} - \frac{\gamma_{0i}\gamma_{0j}}{\gamma_{00}}$, soit de la métrique $d\tilde{s}^2 = \tilde{g}_{ij} dx^i dx^j$, avec $\tilde{g}_{ij} = \xi g_{ij}$ (quelquefois, $d\tilde{s}^2$ désignera une métrique conforme quelconque et $\tilde{g}_{ij}$ désignera λg_{ij}).

W_3 , sections d'espace de V_4 (définies par $x^4 = \text{Cte}$), seront munies de la métrique $d\tilde{s}^2$ induite par celle de V_4 .

Métrique.....	$d\tau^2$	ds^2	$d\tilde{s}^2$	$d\tilde{s}^2$
Discriminant.....	γ	g	$\tilde{g}$	$\bar{g}$
Connexion riemannienne.....	$\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$	Γ_{jk}^i	$\tilde{\Gamma}_{jk}^i$	$\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$
Dérivation covariante.....	D_ρ	∇_i	$\tilde{\nabla}_i$	$\bar{\nabla}_A$
Tenseur de Ricci.....	$R_{\alpha\beta}$	$\hat{R}_{ij}$	$\hat{\tilde{R}}_{ij}$	—
» d'Einstein.....	$S_{\alpha\beta}$	$\hat{S}_{ij}$	$\hat{\tilde{S}}_{ij}$	—

on pose

$$\gamma_{00} = -\xi^2,$$

$$\Gamma^{\alpha\beta} = \gamma^{\alpha\beta} \sqrt{\gamma}.$$

PREMIÈRE PARTIE.

THÉORIE DE JORDAN-THIRY.

CHAPITRE I.

FONDEMENTS DE LA THÉORIE PENTADIMENSIONNELLE DE JORDAN-THIRY.

1. La variété riemannienne V_5 . — Avant de préciser les fondements de la théorie de Jordan-Thiry, rappelons la définition d'une variété munie d'une structure différentiable de classe G^v . Une variété V_n à n dimensions est un espace topologique, séparé, connexe, dont chaque point possède un voisinage homéomorphe à la boule ouverte euclidienne à n dimensions. Ces homéomorphismes induisent sur V_n des systèmes de coordonnées locales, qui définissent sur V_n une structure différentiable de classe C^v si :

α. les domaines de carte recouvrent V_n ;

β. en un point x appartenant à l'intersection des domaines de deux cartes locales, les coordonnées de x dans l'une des cartes sont des fonctions v fois continûment différentiables, à jacobien non nul, de ses coordonnées dans l'autre carte.

Le cadre géométrique de la théorie de Jordan-Thiry est une variété différentiable V_5 à cinq dimensions, de classe C^2 , C^4 par morceaux. (Ce qui signifie que, dans l'intersection des domaines de deux systèmes de coordonnées, les dérivées secondes continues du changement de coordonnées sont encore de classe C^2 , excepté dans le voisinage d'un nombre fini de surfaces de discontinuités, les discontinuités étant du type de Hadamard.)

Au point x générique de V_5 , de coordonnées locales (x^λ) , est définie une métrique riemannienne de type hyperbolique normal, de signature $(+ - - -)$. Rapportée à un repère naturel, elle s'écrit

$$d\sigma^2 = \gamma_{\alpha\beta}(x^\lambda) dx^\alpha dx^\beta$$

(α, β , tout indice grec $= 0, 1, 2, 3, 4$).

Les potentiels $\gamma_{\alpha\beta}$ sont de classe C^1, C^3 par morceaux, hypothèse compatible avec la structure différentiable de V_5 .

Nous supposons que V_5 admet un groupe connexe G à un paramètre d'isométries globales de V_5 . G définit une relation d'équivalence $R \equiv \frac{V_5}{G}$, dont les classes d'équivalence sont les trajectoires z relatives à G . Désignons par V_4 , l'espace quotient $\frac{V_5}{z}$ de V_5 , par les trajectoires d'isométrie. De plus, nous faisons les hypothèses suivantes sur les trajectoires z :

a. elles sont orientées de façon que $d\sigma^2 < 0$ et ne laissent invariant aucun point de V_5 ;

b. elles sont homéomorphes au cercle T^1 ;

c. V_4 est une variété différentiable de classe C^2, C^4 par morceaux, et V_5 peut être identifiée au produit topologique $V_4 \times T^1$. $\vec{\xi}$, le vecteur générateur infinitésimal du groupe d'isométries, satisfait les équations de Killing :

$$X\gamma_{\alpha\beta} = D_\beta \xi_\alpha + D_\alpha \xi_\beta = 0,$$

X étant l'opérateur de dérivation de Lie relatif au vecteur $\vec{\xi}$.

2. Repère adapté au groupe d'isométries. — Choisissons les coordonnées locales (x^i) de V_5 telles que les (x^i) soient les coordonnées locales d'un point de V_4 (i , tout indice latin = 1, 2, 3, 4).

La donnée des (x^i) détermine une trajectoire z sur laquelle x^0 varie seul. D'où

$$\xi^i = 0, \quad \xi^0 \neq 0.$$

Par un changement de coordonnées conservant globalement chaque trajectoire, on peut toujours se ramener à $\xi^0 = 1$. Les variétés $x^0 = \text{Cte}$ sont alors homéomorphes à V_4 .

Un système de coordonnées locales, satisfaisant les propriétés que nous venons d'énoncer, est dit adapté au groupe d'isométries.

Dans un tel système de coordonnées locales les équations de Killing s'écrivent

$$X\gamma_{\alpha\beta} \equiv \partial_0 \gamma_{\alpha\beta} = 0.$$

Les $\gamma_{\alpha\beta}$ sont indépendants de x^0 .

Les changements de repère permettant de passer d'un repère adapté à un autre sont de la forme

$$(I.1) \quad \begin{cases} x^{i'} = \psi^{i'}(x^j), \\ x^{0'} = x^0 + \psi(x^j), \end{cases}$$

$\psi^{i'}$ et ψ sont des fonctions arbitraires des x^j . Dans toute la suite, nous n'utiliserons que des systèmes de coordonnées locales adaptées.

3. **Variété riemannienne V_5 . Tenseur champ électromagnétique.** — Les trajectoires z étant orientées de façon que $d\sigma^2 < 0$, nous déduisons $\gamma_{00} < 0$ et nous pouvons poser

$$\gamma_{00} = -\xi^2, \quad \text{avec } \xi > 0.$$

En groupant les termes en dx^0 dans $d\sigma^2$:

$$d\sigma^2 = \frac{1}{\gamma_{00}} [\gamma_{00} dx^0 + \gamma_{0i} dx^i]^2 + \left(\gamma_{ij} - \frac{\gamma_{0i} \gamma_{0j}}{\gamma_{00}} \right) dx^i dx^j.$$

Étant donné le type de la métrique, $d\sigma^2$ peut se mettre sous la forme

$$(I.2) \quad d\sigma^2 = -(\omega^0)^2 + (\omega^\perp)^2 - (\omega^\parallel)^2 - (\omega^2)^2 - (\omega^3)^2,$$

où

$$\omega^0 = \frac{1}{\xi} [\gamma_{00} dx^0 + \gamma_{0i} dx^i].$$

Les ω^α sont des formes de Pfaff des dx^α .

Le repère $(x, \vec{e}_\alpha)$ dual du repère (x, ω^α) est orthonormé; $\vec{e}_0$ est tangente en x à la trajectoire z passant par x . Le repère $(x, \vec{e}_\alpha)$ est appelé repère orthonormé adapté.

Posons

$$(I.3) \quad ds^2 = \left(\gamma_{ij} - \frac{\gamma_{0i} \gamma_{0j}}{\gamma_{00}} \right) dx^i dx^j.$$

Désignons par W_4 une section de V_5 par $x^0 = \text{Cte}$. Dans un changement de repères adaptés sur W_4 , on vérifie que γ_{ij} définit un tenseur covariant d'ordre 2, γ_{0i} un vecteur covariant d'ordre 1, et γ_{00} un scalaire. Donc, $g_{ij} = \gamma_{ij} - \frac{\gamma_{0i} \gamma_{0j}}{\gamma_{00}}$, définit sur W_4 un tenseur covariant d'ordre 2. Et d'après (I.2) :

$$(I.4) \quad ds^2 = (\omega^\perp)^2 - (\omega^\parallel)^2 - (\omega^2)^2 - (\omega^3)^2.$$

Donc, ds^2 est invariant dans un changement de coordonnées locales adaptées conservant globalement chaque trajectoire π :

$$(1.5) \quad \begin{cases} x'' = x^t, \\ x^{0'} = x^0 + \psi(x^t). \end{cases}$$

Ainsi, ds^2 définit intrinsèquement sur V_4 une métrique riemannienne, de type hyperbolique normal, de signature $(+---)$. Dans ce qui suit, V_4 et les sections W_4 seront alors munies de la métrique riemannienne ds^2 ou d'une métrique conforme.

F. Hennequin a montré dans sa thèse [27] qu'il était intéressant de munir V_4 de la métrique conforme ξds^2 .

Considérons maintenant le champ de vecteurs covariants φ_i , défini sur W_4 par

$$\beta \varphi_i = \frac{\gamma_{0i}}{\gamma_{00}},$$

où β est une constante.

Dans le changement de coordonnées (1.5), la loi de transformation des φ_i est

$$\beta \varphi_{i'} = \beta \varphi_i - \partial_i \psi.$$

Mais $F_{ij} = \partial_i \varphi_j - \partial_j \varphi_i$ est invariant dans le même changement de coordonnées. Ce tenseur est donc intrinsèquement défini sur V_4 .

Étant donnés les résultats obtenus dans ce paragraphe, V_4 , munie de la métrique ds^2 (ou d'une métrique conforme), sera interprétée comme l'espace-temps de la relativité générale.

Le champ de vecteurs φ_i associé à chaque section W_4 sera interprété comme potentiel-vecteur électromagnétique et F_{ij} comme le champ électromagnétique.

4. Équations de champ dans V_5 . — Dans la théorie de Thiry, on suppose que les équations de champ sont une généralisation formelle des équations d'Einstein de la relativité générale et s'écrivent

$$S_{\alpha\beta} = \Theta_{\alpha\beta},$$

$S_{\alpha\beta}$ désigne le tenseur d'Einstein de V_5 . $\Theta_{\alpha\beta}$, appelé tenseur d'impulsion-énergie de V_5 , doit représenter au mieux une distribution de masses et de charges.

Le cas unitaire extérieur de V_5 correspond au cas champ électromagnétique pur de la relativité générale, et les équations de champ sont dans ce cas :

$$S_{\alpha\beta} = 0.$$

§. Théorie provisoire de l'électromagnétisme en relativité générale. — Avant de traduire dans V_4 les équations de champ de V_5 pour en déduire une interprétation physique, nous allons rappeler les équations de champ d'un fluide parfait chargé en relativité générale. Sur la variété à quatre dimensions, cadre géométrique de la relativité générale, se trouve définie une métrique hyperbolique normale $ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j$ de signature $(+---)$. Les équations de champ du cas intérieur sont :

$$S_{ij} = \chi (T_{ij} + \tau_{ij}), \quad \text{où } \chi = \frac{8\pi G}{c^2},$$

G étant la constante d'attraction universelle;

c la vitesse de la lumière.

Les sources d'énergie provenant de la matière sont représentées par le tenseur matériel d'impulsion-énergie T_{ij} ; pour représenter les phénomènes électromagnétiques, on utilise le tenseur d'impulsion-énergie τ_{ij} . Les expressions de T_{ij} et de τ_{ij} sont induites par celles de la relativité restreinte. Pour un fluide, T_{ij} est défini en première approximation par

$$(1.6) \quad T_{ij} = \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) u_i u_j - \frac{p}{c^2} g_{ij},$$

ρ et p sont des fonctions scalaires > 0 désignant respectivement la densité propre et la pression propre du fluide, u_i désigne le vecteur vitesse unitaire de la variété.

T_{ij} ainsi choisi, définit le schéma fluide parfait. Si nous annulons p dans la relation (1.6), T_{ij} définit alors le schéma matière pure. Dans la suite de ce travail, nous nous placerons dans l'un ou l'autre de ces deux schémas.

τ_{ij} se trouve défini à partir de H_{ij} (tenseur champ magnétique $\vec{H}$ -induction électrique $\vec{D}$) et de F_{ij} (tenseur champ électrique $\vec{E}$ -induction magnétique $\vec{B}$) :

$$(1.7) \quad \tau_{ij} = \frac{1}{4\pi c^2} \left[\frac{g_{ij}}{4} H_{kl} F^{kl} - \frac{1}{2} (H_i^k F_{jk} + H_{jk} F_i^k) \right].$$

De plus, H_{ij} et F_{ij} sont liés par les relations

$$H_{ij} = \frac{F_{ij}}{\tau} + \frac{1-\tau d}{\tau} (F_{ip}u_j + F_{jp}u_i)u^p.$$

τ et d sont des scalaires désignant respectivement la perméabilité magnétique et le pouvoir diélectrique.

Dans un milieu non dispersif ($\tau d = 1$), cas qui nous intéresse dans ce travail, nous obtenons

$$H_{ij} = dF_{ij}.$$

Enfin, si nous supposons que le vecteur courant se réduit à un courant de convection, H_{ij} et F_{ij} satisfont aux deux groupes suivants d'équations appelées équations de Maxwell :

$$\begin{aligned}\nabla_j H^{ji} &= -4\pi\mu u^i, \\ \frac{1}{2}\eta^{ijkl}\nabla_i F_{jk} &= 0,\end{aligned}$$

μ désigne la densité de charge électrique et η^{ijkl} les composantes contravariantes du tenseur élément de volume de la variété.

Le deuxième groupe d'équations exprime l'existence locale d'un potentiel vecteur φ_i , dont nous supposons l'existence globale, tel que

$$F_{ij} = \partial_i \varphi_j - \partial_j \varphi_i$$

Les équations de champ du cas intérieur d'un fluide parfait chargé sont alors, dans le cadre de la relativité générale :

$$(I.8) \quad \left\{ \begin{array}{l} S_{ij} = \chi(T_{ij} + \tau_{ij}), \\ \nabla_j H^{ji} = -4\pi\mu u^i, \end{array} \right.$$

où $F_{ij} = \partial_i \varphi_j - \partial_j \varphi_i$. T_{ij} et τ_{ij} sont respectivement définis par (I.6) et (I.7). Les équations (I.8) sont appelées équations de la théorie provisoire de l'électromagnétisme.

6. Traduction dans V_4 des équations de champ du cas unitaire extérieur de V_3 . Interprétation physique. — α . Nous allons traduire dans V_4 , munie de la métrique ds^2 définie par (I.3), les équations de champ du cas unitaire extérieur de V_3 . Les équations obtenues doivent être comparables aux équations de champ de la théorie

provisoire, dans le schéma champ électromagnétique pur, c'est-à-dire aux équations (I.8) dans lesquelles nous annulons T_{ij} et μ :

$$(I.8') \quad \begin{cases} S_{ij} - \chi \tau_{ij} = 0, \\ \nabla_j H^{ij} = 0, \end{cases}$$

c'est ce qui nous amènera à certaines interprétations physiques.

Les composantes du tenseur d'Einstein défini dans la variété V_5 , rapportée à un repère orthonormé, peuvent s'exprimer en termes de V_4 , d'après les calculs de Y. Thiry ([35], p. 343). En particulier, nous avons

$$(I.9) \quad S_{\underline{i}\underline{j}} = \frac{\beta}{2\xi^2} \nabla_j (\xi^3 F_{\underline{i}}^{\underline{j}}),$$

∇_j désigne l'opérateur de dérivation covariante pour la connexion riemannienne de V_4 .

F_{ij} et ξ ont été définis dans le paragraphe 3.

La notation soulignée signifie que les composantes des tenseurs sont prises en repères orthonormés (soit de V_5 , soit de V_4).

Les équations $S_{\underline{i}\underline{j}} = 0$, comparées au deuxième groupe des équations (I.8') entraînent l'existence d'un pouvoir diélectrique $d = \xi^3$. F_{ij} étant interprété comme les composantes covariantes du tenseur champ électrique-induction magnétique de V_4 , le tenseur de composantes covariantes $H_{ij} = \xi^3 F_{ij}$ définit le tenseur champ magnétique-induction électrique.

τ_{ij} étant alors défini par (I.7) à partir de F_{ij} et H_{ij} , les calculs de Y. Thiry signalés plus haut entraînent

$$(I.10) \quad \begin{cases} S_{\underline{i}\underline{j}} = \hat{S}_{\underline{i}\underline{j}} - \frac{2\pi c^2 \beta^2}{\xi} \tau_{\underline{i}\underline{j}} - \frac{1}{\xi} (\nabla_{\underline{i}} \partial_{\underline{j}} \xi - g_{\underline{i}\underline{j}} \Delta \xi), \\ S_{\underline{0}\underline{0}} = \frac{1}{2} \hat{R} + \frac{3}{8} \beta^2 \xi^2 F_{\underline{i}\underline{j}} F_{\underline{i}\underline{j}}, \end{cases}$$

$\hat{S}_{ij}$ et $\hat{R}_{ij}$ désignent respectivement les composantes covariantes du tenseur d'Einstein et de Ricci dans V_4 .

L'opérateur Δ est défini par $\nabla_i (g^{ij} \partial_j)$.

Les équations $S_{\underline{i}\underline{j}} = 0$ peuvent alors être comparées au premier groupe des équations (I.8') et définissent un facteur de gravitation variable $\left(-2\pi c^2 \frac{\beta^2}{\xi} \right)$.

La 15^e équation $S_{00} = 0$ doit permettre de déterminer ξ . Nous allons mettre en évidence cette équation; pour cela nous remplacerons l'équation $S_{00} = 0$ par une autre, compte tenu des équations $S_{ij} = 0$.

Ayant posé $R = \gamma^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}$ et $S = \gamma^{\alpha\beta} S_{\alpha\beta}$, de la relation

$$S_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \gamma_{\alpha\beta} R,$$

nous déduisons :

$$(I.11) \quad \begin{aligned} S &= -\frac{3}{2} R \\ S_{00} &= R_{00} - \frac{1}{2} S. \end{aligned}$$

De plus, pour une solution de $S_{ij} = 0$, on a

$$(I.12) \quad S = -S_{00}.$$

De (I.11) et (I.12), on déduit pour une solution de $S_{ij} = 0$,

$$R_{00} = \frac{2}{3} S_{00}.$$

Donc le système $S_{\alpha\beta} = 0$ est équivalent au système

$$\begin{cases} S_{\alpha\beta} = 0, \\ R_{00} = 0. \end{cases}$$

D'après les calculs de Y. Thiry ([35], p. 343) :

$$R_{00} = \frac{\Delta\xi}{\xi} + \frac{\beta^2 \xi^2}{4} F_{ij} F^{ij}.$$

Les équations de champ du cas unitaire extérieur de V_5 peuvent alors s'écrire en repères naturels adaptés :

$$(I.13) \quad \begin{cases} S_{ij} - 2\pi c^2 \frac{\beta^2}{\xi} \tau_{ij} + \frac{1}{\xi} (\nabla_i \partial_j \xi - g_{ij} \Delta\xi) = 0, \\ \nabla_j H^j_i = 0, \\ \frac{\Delta\xi}{\xi} + \frac{\beta^2 \xi^2}{4} F_{ij} F^{ij} = 0. \end{cases}$$

Pour ξ constant, les deux premiers groupes d'équations (I.13) deviennent les équations de la théorie provisoire de l'électroma-

gnétisme, dans le schéma champ électromagnétique pur, mais ξ constant n'est pas solution de la dernière équation (I.13) (excepté dans le cas particulier $F_{ij}F^{ij} = 0$). Donc, dans la théorie de Jordan-Thiry, on ne peut pas supposer ξ constant. *La théorie provisoire de l'électromagnétisme dans le schéma champ électromagnétique pur n'apparaît donc pas comme un cas particulier de la théorie de Jordan-Thiry.*

b. L'introduction dans V_4 d'un facteur de gravitation variable reste peu satisfaisante. Aussi, F. Hennequin [27] a proposé de munir V_4 d'une métrique $d\check{s}^2$ conforme à ds^2 .

Posons

$$d\check{s}^2 = \lambda ds^2.$$

Chaque élément défini dans V_4 , muni de la métrique ds^2 , sera défini dans V_4 munie de la métrique $d\check{s}^2$ et sera désigné par la même lettre surmontée d'un astérisque.

De $\check{F}_{ij} = F_{ij}$, on déduit

$$\check{F}^{ij} = \frac{F^{ij}}{\lambda^2}, \quad \check{H}_{ij} = H_{ij},$$

d'où, d'après (I.7) :

$$(I.14) \quad \check{\tau}_{ij} = \frac{\tau_{ij}}{\lambda}.$$

Après des calculs directs, il vient

$$(I.15) \quad \left\{ \begin{array}{l} \hat{S}_{ij} = \hat{S}_{ij} - \frac{3}{4} g_{ij} g^{pq} \frac{\partial_p \lambda}{\lambda} \frac{\partial_q \lambda}{\lambda} + \frac{3}{2} \frac{\partial_i \lambda}{\lambda} \frac{\partial_j \lambda}{\lambda} - \frac{1}{\lambda} [\nabla_i \partial_j \lambda - g_{ij} \Delta \lambda], \\ \check{\nabla}_i \check{H}^i{}_j = \frac{1}{\lambda} \nabla_j H^i{}_i, \\ \check{\Delta} \xi = \frac{\Delta \xi}{\lambda} + g^{mn} \frac{\partial_m \xi}{\lambda} \frac{\partial_n \lambda}{\lambda}, \end{array} \right.$$

Δ est l'opérateur représentant $g^{mn} \nabla_m \partial_n$. D'après le premier groupe des équations (I.13), écrites en termes de V_4 munie de la métrique $d\check{s}^2$, le facteur de gravitation sera celui de la relativité générale si

$$\frac{2\pi c^2 \xi^2 \lambda}{\xi} = \frac{8\pi G}{c^2},$$

λ doit donc être égal à ξ à une constante multiplicative près. β étant une constante à déterminer, nous pouvons prendre la métrique de F. Hennequin définie par $\lambda = \xi$, ce qui entraîne

$$\beta^2 = \frac{4G}{c^4}.$$

Dans la variété V_4 munie de la métrique $ds^2 = \xi ds^2$, les équations de champ du cas unitaire extérieur, s'écrivent alors, en coordonnées locales adaptées

$$(I.16) \quad \begin{cases} \hat{S}_{ij} + \frac{3}{4} \hat{g}_{ij} \hat{g}^{\rho\eta} \frac{\partial_p \xi}{\xi} \frac{\partial_q \xi}{\xi} - \frac{3}{2} \frac{\partial_i \xi}{\xi} \frac{\partial_j \xi}{\xi} - \frac{8\pi G}{c^2} \hat{t}_{ij} = 0, \\ \hat{\nabla}_j \hat{H}^j_i = 0, \\ \frac{\Delta^* \xi}{\xi} - \hat{g}^{mn} \frac{\partial_m \xi}{\xi} \frac{\partial_n \xi}{\xi} + \frac{\beta^2}{4} \hat{H}_{ij} \hat{F}^{ij} = 0. \end{cases}$$

CHAPITRE II.

ÉTUDE DU SCHEMA FLUIDE PARFAIT : ÉQUATIONS DE CHAMP,
PROBLÈME DE CAUCHY,
CONDITIONS DE CONSERVATION TRADUITES DANS LA VARIÉTÉ V_4 .

7. Traduction dans V_4 des équations de champ du cas unitaire intérieur. Définition du schéma fluide parfait pentadimensionnel. — Les équations de champ du cas intérieur (§ 4) peuvent s'écrire en repères orthonormés adaptés :

$$(II.1) \quad \begin{cases} S_{\underline{l}\underline{l}} = \Theta_{\underline{l}\underline{l}}, \\ S_{\underline{0}\underline{l}} = \Theta_{\underline{0}\underline{l}}, \\ R_{\underline{0}\underline{0}} = \frac{1}{3} \Theta_{\underline{\alpha}\underline{\alpha}} + \Theta_{\underline{0}\underline{0}}. \end{cases}$$

Nous nous proposons d'écrire les équations de champ de V_5 en termes de V_4 , munie de la métrique ds^2 puis de la métrique conforme ξds^2 . Tout d'abord, nous ne particulariserons pas le tenseur d'impulsion-énergie de V_5 , de façon à obtenir la signification physique de ce tenseur, si V_4 est la variété espace-temps de la relativité générale. Ensuite, nous donnerons à $\Theta_{\alpha\beta}$ une forme particulière, permettant de définir le schéma fluide parfait pentadimensionnel,

schéma généralisant le schéma fluide parfait champ électromagnétique de la relativité générale.

a. Nous allons traduire les équations (II. 1) en termes de V_4 munie de la métrique ds^2 . A partir des composantes covariantes $\Theta_{\alpha\beta}$ du tenseur d'impulsion-énergie symétrique de V_5 , nous pouvons définir intrinsèquement dans V_4 un tenseur symétrique de composantes $\hat{\Theta}^{ij}$, un vecteur de composantes $\hat{\Theta}^i$ et un scalaire $\hat{\Theta}$:

$$(II.2) \quad \hat{\Theta}^{ij} = \Theta^{ij}, \quad \hat{\Theta}^i = \Theta_0^i, \quad \hat{\Theta} = \Theta_{00}.$$

Un changement du repère naturel en repère orthonormé adapté (défini au paragraphe 3) s'effectue à l'aide des formules

$$(II.3) \quad \begin{cases} \omega^0 = \xi (dx^0 + \beta \varphi_i dx^i), \\ \omega^i = \Lambda_j^i dx^j, \\ dx^i = \Lambda_{\underline{j}}^i \omega^{\underline{j}}. \end{cases}$$

Les deux dernières expriment aussi dans V_4 un changement de repère naturel en repère orthonormé. D'où

$$\begin{aligned} \hat{\Theta}_{\underline{i}\underline{j}} &= \Theta_{\underline{i}\underline{j}}, \\ \Theta_{00} &= \xi^2 \Theta_{\underline{0}\underline{0}}, \end{aligned}$$

Θ_α^α est un scalaire intrinsèquement défini sur V_4 . Il s'exprime en fonction des éléments de V_4 déjà signalés :

$$\Theta_\alpha^\alpha = \hat{\Theta}_i^i + \frac{\hat{\Theta}}{\gamma_{00}}.$$

De (I.9), (I.10) et (II.1), nous déduisons les équations de champ du cas unitaire intérieur en coordonnées locales adaptées, en termes de V_4 :

$$(II.4) \quad \begin{cases} \hat{S}_{ij} - \frac{2\pi c^2 \beta^2}{\xi} \tau_{ij} - \frac{1}{\xi} (\nabla_i \partial_j \xi - g_{ij} \Delta \xi) = \hat{\Theta}_{ij}, \\ \frac{\beta}{2} \nabla_j H^{jl} = \Theta_0^l, \\ \frac{\Delta \xi}{\xi} + \frac{\beta^2 \xi^2}{4} F_{ij} F^{ij} = \frac{\Theta_\alpha^\alpha}{3} + \frac{\Theta_{00}}{\xi^2}. \end{cases}$$

En comparant les deux premiers systèmes d'équations à celles de la théorie provisoire de l'électromagnétisme (I.8), nous obtenons les

interprétations suivantes pour Θ^{ij} et Θ_0^i : $\frac{2}{\chi^2} \Theta_0^i$ représente le vecteur courant et $\frac{\Theta^{ij}}{\chi}$ le tenseur matériel d'impulsion-énergie de la relativité générale; Θ_{00} n'a pas d'interprétation physique. $\chi = \frac{8\pi G}{c^2}$ est le facteur de gravitation de la relativité générale.

b. Comme dans le cas unitaire extérieur, nous allons traduire les équations (II.4) dans V_4 munie de la métrique $ds^2 = \xi ds^2$. Θ^{ij} définit alors intrinsèquement dans V_4 un tenseur $\hat{\Theta}^{ij}$:

$$\hat{\Theta}^{ij} = \Theta^{ij},$$

d'où

$$\hat{\Theta}_{ij} = \frac{\hat{\Theta}^{ij}}{\xi^2}.$$

D'après (I.14) et (I.15), les équations de champ du cas unitaire intérieur s'écrivent

$$(II.5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \hat{S}_{ij} + \frac{3}{4} \check{g}_{ij} \check{g}^{pq} \frac{\partial_p \xi}{\xi} \frac{\partial_q \xi}{\xi} - \frac{3}{2} \frac{\partial_i \xi}{\xi} \frac{\partial_j \xi}{\xi} - 8\pi \frac{G}{c^2} \tau_{ij} = \frac{\hat{\Theta}_{ij}}{\xi^2}, \\ \frac{\beta}{2} \xi \check{\nabla}_j \check{H}^{ij} = \Theta_0^i, \\ \frac{\check{\Delta} \xi}{\xi} - \check{g}^{mn} \frac{\partial_m \xi}{\xi} \frac{\partial_n \xi}{\xi} + \frac{\beta^2}{4} \check{H}_{ij} \check{R}^{ij} = \frac{\Theta_2}{3} + \frac{\Theta_{00}}{\xi^2}. \end{array} \right.$$

Avec cette nouvelle métrique, le tenseur d'impulsion-énergie de V_3 reçoit une interprétation différente de celle donnée précédemment : $\frac{2}{\beta \xi} \Theta_0^i$ représente le vecteur courant et $\frac{\Theta^{ij}}{\chi \xi^2}$ le tenseur matériel d'impulsion-énergie de la relativité générale.

c. Nous nous proposons maintenant de définir le schéma fluide parfait de la théorie de Jordan-Thiry, susceptible de généraliser formellement le schéma fluide parfait-champ électromagnétique de la relativité générale (§ 5). Θ_{00} qui, d'après ce qui précède, n'a pas d'interprétation physique, pourra ainsi être calculé. Nous ferons une étude analogue à celle du schéma matière pure pentadimensionnel ([35], p. 348-349), schéma qui doit d'ailleurs être un cas particulier du schéma fluide parfait pentadimensionnel, lorsque nous négligeons la pression.

r et l étant des fonctions scalaires à déterminer, nous choisissons comme tenseur d'impulsion-énergie

$$(II.6) \quad \Theta_{\alpha\beta} = r \varphi_{\alpha} \varphi_{\beta} - l \gamma_{\alpha\beta},$$

$d\sigma^2$ peut être de signe variable. Le vecteur $\vec{\varphi}$ contravariant, vitesse unitaire de V_5 , sera alors défini par ses composantes

$$\varphi^x = \frac{dx^x}{d\tau},$$

où

$$d\tau^2 \geq 0, \quad d\tau^2 = \varepsilon d\sigma^2 \quad (\varepsilon = \pm 1),$$

ce qui entraîne

$$\varphi^x \varphi_x = \varepsilon.$$

Les trajectoires de $\vec{\varphi}$ dans V_5 sont appelées lignes de courant pentadimensionnelles.

Nous allons montrer que φ^i peut s'exprimer en fonction des composantes contravariantes du vecteur vitesse unitaire de V_4 munie de la métrique $d\hat{s}^2 = \xi ds^2$, de ξ et de φ_0 . De la relation

$$\varepsilon d\tau^2 = -\frac{1}{\xi^2} (\gamma_{00} dx^0 + \gamma_{0i} dx^i)^2 + \frac{(d\hat{s})^2}{\xi},$$

nous tirons

$$\frac{d\hat{s}}{d\tau} = \sqrt{\xi} \sqrt{\varepsilon + \frac{\varphi_0^2}{\xi^2}}.$$

Il faut ajouter la condition $\varepsilon + \frac{\varphi_0^2}{\xi^2} > 0$, puisque ξ a été choisi positif et que l'interprétation de la relativité générale pose la condition $d\hat{s}^2 > 0$. D'où

$$(II.6') \quad \begin{aligned} \varphi^i &= \dot{u}^i \frac{d\hat{s}}{d\tau}, \\ \varphi^i &= \dot{u}^i \sqrt{\xi} \sqrt{\varepsilon + \frac{\varphi_0^2}{\xi^2}}. \end{aligned}$$

Signalons en passant que ξ et φ_0 sont des scalaires intrinsèquement définis dans V_4 .

Au paragraphe §, nous avons vu que dans le schéma fluide parfait chargé de la théorie provisoire de l'électromagnétisme, le vecteur courant (s'il est supposé se réduire à un courant de convec-

tion) est $(-4\pi\mu\dot{u}^i)$ et le tenseur matériel d'impulsion-énergie $\left[\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right)\dot{u}^i\dot{u}^j - \frac{p}{c^2}\dot{x}^{ij}\right]$.

Nous allons montrer alors que les interprétations données à l'alinéa *b* de ce paragraphe entraînent la détermination de r , l et v_0 . En effet, $\Theta_{\alpha\beta}$ étant défini par (II.6) et exprimé en termes de V_4 , nous avons

$$\frac{2}{\beta\sqrt{\xi}}rv_0\dot{u}^i\sqrt{\varepsilon + \frac{v_0^2}{\xi^2}} = -4\pi\mu\dot{u}^i,$$

$$\left(\varepsilon + \frac{v_0^2}{\xi^2}\right)\frac{r}{\xi}\dot{u}^i\dot{u}^j - \frac{l}{\xi}\dot{x}^{ij} = \chi\left[\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right)\dot{u}^i\dot{u}^j - \frac{p}{c^2}\dot{x}^{ij}\right],$$

ce qui entraîne les relations suivantes :

$$(II.6'') \quad \begin{cases} -2\pi\mu\beta\sqrt{\xi} = rv_0\sqrt{\varepsilon + \frac{v_0^2}{\xi^2}}, \\ \chi\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right)\xi = r\left(\varepsilon + \frac{v_0^2}{\xi^2}\right), \\ l = \xi\chi\frac{p}{c^2}. \end{cases}$$

Nous pouvons ainsi exprimer la densité de matière ρ , la pression p et la densité de charge μ en fonction de r , l , v_0 et ξ ,

$$(II.7) \quad \begin{cases} \frac{p}{c^2} = \frac{l}{\chi\xi}, \\ \mu = -\frac{rv_0}{2\pi\beta\sqrt{\xi}}\sqrt{\varepsilon + \frac{v_0^2}{\xi^2}}, \\ p = \frac{r}{\chi\xi}\left(\varepsilon + \frac{v_0^2}{\xi^2}\right) - \frac{l}{\chi\xi^2}. \end{cases}$$

Ces relations permettent réciproquement de déterminer r , l et v_0 en fonction de ρ , p , μ et ξ . Pour simplifier l'écriture, nous posons

$$\Lambda = \frac{\mu}{\beta c^2\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right)}.$$

Nous obtenons alors

$$(II.8) \quad \begin{cases} v_0 = \frac{-\Lambda\xi}{\sqrt{\varepsilon(\xi^3 - \Lambda^2)}}, \\ r = \chi\xi\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right)\left(1 - \frac{\Lambda^2}{\xi^3}\right)\xi, \\ l = \chi\xi\frac{p}{c^2}. \end{cases}$$

Notons que la condition $\varepsilon(\xi^3 - \Lambda^2) > 0$ est la traduction de la condition $\varepsilon + \frac{v_0^2}{\xi^2} > 0$: c'est elle qui permet de déterminer les valeurs possibles de ε .

Le schéma fluide parfait en théorie de Jordan-Thiry est donc déterminé par les équations de champ du cas unitaire intérieur :

$$S_{\alpha\beta} = r v_{\alpha} v_{\beta} - l \gamma_{\alpha\beta},$$

où r , l et v_0 sont déterminés par (II.8) avec la condition $\varepsilon(\xi^3 - \Lambda^2) > 0$. Nous verrons que r , l et v_{λ} sont invariants par le groupe d'isométries, c'est-à-dire, en coordonnées adaptées, sont indépendants de x^0 .

Si $\varepsilon = +1$ (resp. $\varepsilon = -1$), on obtient les lignes de courant telles que $d\sigma^2 > 0$ (resp. $d\sigma^2 < 0$). Pour que les scalaires ρ et p puissent être interprétés respectivement comme la densité de matière propre et la pression propre, il est nécessaire qu'ils soient > 0 , ce qui entraîne les conditions suivantes pour r , l et v_0 d'après (II.7) et (II.8) :

$$(II.9) \quad 0 < l < r \left(\varepsilon + \frac{v_0^2}{\xi^2} \right).$$

D'après (II.9), nous pouvons remplacer la condition supplémentaire $\varepsilon + \frac{v_0^2}{\xi^2} > 0$ par la condition $r > 0$.

Les relations (II.7) entraînent immédiatement que l'hypothèse d'un fluide parfait, lié par une équation d'état, se traduit en théorie de Jordan-Thiry par $\frac{r}{\xi} \left(\varepsilon + \frac{v_0^2}{\xi^2} \right)$ fonction de $\frac{l}{\xi}$:

$$(II.10) \quad \frac{r}{\xi} \left(\varepsilon + \frac{v_0^2}{\xi^2} \right) = \psi \left(\frac{l}{\xi} \right),$$

ce qui entraîne

$$\chi^2 = \psi \left(\chi \frac{P}{c^2} \right) - \chi \frac{P}{c^2}.$$

Dans le cas intérieur, le schéma fluide parfait avec équations d'état, sera supposé défini par les équations

$$(II.11) \quad S_{\alpha\beta} = r v_{\alpha} v_{\beta} - l \gamma_{\alpha\beta},$$

avec les conditions

$$(II.12) \quad \begin{cases} v^i v_i = \varepsilon, \\ r \left(\varepsilon + \frac{v_0^2}{2} \right) = \frac{1}{2} \psi \left(\frac{l}{\sqrt{\frac{1}{2} \varepsilon}} \right), \\ \left(0 - l + \frac{1}{2} \psi \left(\frac{l}{\sqrt{\frac{1}{2} \varepsilon}} \right) \right), \\ r > 0. \end{cases}$$

De plus r , l et v_0 s'expriment en fonction de ρ , p et μ d'après (II.8).

8. Conditions de conservation de V_5 , dans le schéma fluide parfait. — Le tenseur d'Einstein $S_{\alpha\beta}$ étant conservatif, le tenseur d'impulsion-énergie de V_5 , $\Theta_{\alpha\beta}$ doit satisfaire aux conditions de conservation suivantes :

$$D_\alpha \Theta_\beta^\alpha = 0,$$

D_α étant l'opérateur de dérivation covariante pour la connexion riemannienne de V_5 .

Dans le schéma fluide parfait défini par (II.11), ces conditions s'écrivent

$$(II.13) \quad D_\alpha [r v^\alpha v_\beta - l \gamma_\beta^\alpha] = 0.$$

Cette équation multipliée par v^β peut s'écrire

$$(II.13') \quad D_\alpha (r v^\alpha) - \varepsilon v^\alpha \partial_\alpha l = 0.$$

Le système (II.13) peut alors s'écrire, compte tenu de la précédente équation

$$(II.14) \quad r v^\alpha D_\alpha v_\beta + \varepsilon v_\beta v^\alpha \partial_\alpha l - \partial_\beta l = 0.$$

L'équation (II.13') et les équations (II.14), écrites pour $\beta = 0$ et $\beta = i$, seront utilisées dans l'étude du problème de Cauchy. Utilisant l'identité $v^\alpha D_\alpha v_0 \equiv v^i \partial_i v_0$, l'équation (II.14) s'écrit pour $\alpha = 0$:

$$r v^i \partial_i v_0 + \varepsilon v_0 v^i \partial_i l = 0.$$

Le système (II.13) est alors équivalent au système formé par les équations (II.13), écrites pour $\beta = 0$ et $\beta = A$, et par l'équation (II.14) écrite pour $\beta = 0$:

$$(II.15) \quad \begin{cases} r v^i \partial_i v_0 + \varepsilon v_0 v^i \partial_i l = 0, \\ D_\alpha (r v^\alpha v_0) = 0, \\ D_\alpha \Theta_A^\alpha = 0. \end{cases}$$

La première équation peut se traduire par la propriété suivante :
Sur toute ligne de courant,

$$(II.15') \quad \frac{dv_0}{v_0} + \frac{\varepsilon}{r} dl = 0.$$

La deuxième équation se présente comme une équation de continuité. Elle a son équivalent en relativité générale dans le schéma fluide parfait à condition de supposer l'espace temps V_4 stationnaire et rapporté à des coordonnées adaptées.

Notons que dans le schéma matière pure, la première équation entraîne $v_0 = \text{Cte}$ le long des lignes de courant et la deuxième peut alors être remplacée par $D_\alpha(r v^\alpha) = 0$, compte tenu de la première. Dans le schéma fluide parfait, il s'avère plus intéressant de considérer la deuxième équation (II.15) au lieu de l'équation (II.13'). Les conditions de conservation se présentent sous la forme la plus commode à utiliser dans (II.15), pour l'étude des équations de mouvement par la méthode du tenseur impulsion-énergie.

9. Rappels des principes relatifs au problème de Cauchy dans le cas unitaire extérieur. — Avant d'aborder le problème de Cauchy dans le cas intérieur, schéma fluide parfait, rappelons les résultats obtenus par A. Lichnerowicz ([9], p. 207), dans le cas unitaire extérieur.

Le problème est le suivant : étant donnés, sur une hyper-surface Σ de V_5 engendrée par les trajectoires du groupe d'isométries, les potentiels $\gamma_{\alpha\beta}$ et leurs dérivées premières, on cherche à déterminer en dehors de Σ les valeurs de ces potentiels satisfaisant $S_{\alpha\beta} = 0$.

Si Σ a pour équation local $x^4 = 0$, il faut déterminer sur Σ , $\partial_{44}\gamma_{\lambda\mu}$ en fonction des données de Cauchy, c'est-à-dire des valeurs de $\gamma_{\lambda\mu}$ et $\partial_4\gamma_{\lambda\mu}$ sur Σ . Pour $\gamma^{44} \neq 0$, le système $S_{\alpha\beta} = 0$ est équivalent au système

$$(II.16) \quad \left\{ \begin{array}{l} R_{A_1 B_1} = 0 \quad (A_1, B_1, \dots = 0, 1, 2, 3). \end{array} \right.$$

$$(II.17) \quad \left\{ \begin{array}{l} S_\lambda^4 = 0. \end{array} \right.$$

Nous désignerons par le signe $\sim$ une congruence modulo une fonction des données de Cauchy et de leurs dérivées des deux premiers

ordres par rapport aux x^{A_1} . D'où

$$R_{A_1 B_1} \sim -\frac{1}{2} \gamma^{44} \partial_{44} \gamma_{A_1 B_1},$$

$$S_{\lambda}^{\lambda} \sim 0.$$

Les équations (II. 16) déterminent alors sur Σ , $\partial_{44} \gamma_{A_1 B_1}$, à la condition $\gamma^{44} \neq 0$.

Les dérivées $\partial_{44} \gamma_{\lambda\lambda}$ n'interviennent dans aucune équation : ces dérivées n'ont donc par de sens physique. (Il existe en effet des changements de coordonnées conservant les coordonnées de tout point de Σ ainsi que les données de Cauchy. Ces changements de coordonnées permettent de faire disparaître éventuellement les discontinuités à la traversée de Σ de ces dérivées secondes.)

Le système des équations d'Einstein est en évolution. En effet, les conditions suivantes vérifiées sur Σ :

$$S_{\lambda}^{\lambda} = 0, \quad R_{A_1 B_1} = 0$$

entraînent sur Σ :

$$S_{\alpha}^{\beta} = 0, \quad \partial_{\beta} S_{\alpha}^{\beta} = 0.$$

Les identités de conservation

$$D_{\beta} S_{\alpha}^{\beta} = 0$$

entraînent donc sur Σ :

$$\partial_{\lambda} S_{\lambda}^{\lambda} = 0.$$

On peut en déduire que S_{λ}^{λ} est nul au voisinage de Σ .

La résolution du système des équations d'Einstein se ramène donc à deux problèmes :

α . Problème des conditions initiales : Recherche des données de Cauchy satisfaisant le système $S_{\lambda}^{\lambda} = 0$.

β . Problème de l'évolution : Détermination des potentiels $\gamma_{\alpha\beta}$ au voisinage de Σ , solutions du système $R_{A_1 B_1} = 0$, pour des données de Cauchy satisfaisant les conditions du premier problème.

Le problème concernant l'existence et l'unicité des solutions du système des équations d'Einstein a été résolu par Y. Choquet-Bruhat [7]. Sous des hypothèses de différentiabilité, le problème admet une solution unique.

L'étude précédente a mis en évidence les variétés caractéristiques Σ_c , d'équation locale $x^4 = 0$, telles que $\gamma^{44} = 0$. Une variété caractéristique Σ_c , d'équation locale $f(x^i) = 0$, satisfait donc la condition $\gamma^{\alpha\beta} \partial_\alpha f \partial_\beta f = 0$. Elle est alors tangente au cône élémentaire en chacun de ses points. Les caractéristiques de cette équation aux dérivées partielles du premier ordre sont appelées bicaractéristiques des équations d'Einstein. Elles représentent les géodésiques de longueur nulle de la variété V_5 .

Les variétés caractéristiques de V_5 se projettent dans V_4 selon les variétés caractéristiques de V_4 , c'est dire qu'elles sont tangentes en chaque point au cône élémentaire de V_4 .

10. Problème de Cauchy dans le cas unitaire intérieur, schéma fluide parfait. — Étant donnés sur une hypersurface Σ de V_5 engendrées par des trajectoires du groupe d'isométries les potentiels $\gamma_{\alpha\beta}$ et leurs dérivées premières, il faut déterminer au voisinage de Σ les valeurs de $\gamma_{\alpha\beta}$, r et ν_α satisfaisant les équations de champ du cas intérieur, dans le schéma fluide parfait.

Nous supposons en outre que le fluide admet une équation d'état, sinon il faudrait supposer l'une des trois quantités r , l et ν_0 donnée sur Σ , ce qui ne serait pas intéressant physiquement.

a. Rappelons les équations définissant le schéma fluide parfait avec équation d'état.

$$(II.11) \quad S_{\alpha\beta} = r \nu_\alpha \nu_\beta - l \gamma_{\alpha\beta};$$

$$(II.12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \nu^\alpha \nu_\alpha = \varepsilon, \\ r \left(\varepsilon + \frac{\nu_0^2}{\varepsilon^2} \right) = \xi \psi \left(\frac{l}{\varepsilon} \right), \\ 0 < l < \xi \psi \left(\frac{l}{\varepsilon} \right), \\ r > 0. \end{array} \right.$$

Pour $\gamma^{44} \neq 0$, le système (II.11) est équivalent au système

$$(II.18) \quad \left\{ \begin{array}{l} R_{A_1 B_1} = \frac{2l - r\varepsilon}{3} \gamma_{A_1 B_1} + r \nu_{A_1} \nu_{B_1}, \\ S_\lambda^k = r \nu^k \nu_\lambda - l \gamma_\lambda^k. \end{array} \right.$$

Supposons que Σ ait pour équation locale $x^4 = 0$, les données de Cauchy sont alors les valeurs sur Σ de $\gamma_{\alpha\beta}$ et de $\partial_\lambda \gamma_{\alpha\beta}$. S_λ^k dépend

seulement des données de Cauchy. Par contre, le calcul de $R_{A_i B_i}$ modulo une fonction des données de Cauchy et de leurs dérivées par rapport à x^{A_i} , entraîne

$$(II.20) \quad R_{A_i B_i} \sim -\frac{1}{2} \gamma^{kk} \partial_{kk} \gamma_{A_i B_i}.$$

D'après (II.11), (II.12) et (II.19), nous pouvons écrire

$$(II.21) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon (S_l^i + l \gamma_l^i) (S_k^i + l \gamma_k^i) \gamma^{ij} = (r \varphi^k)^2, \\ \varphi^k = \frac{S^{kk} + l \gamma^{kk}}{r \varphi^k}, \\ \varphi_{A_i} = \frac{S_{A_i}^k}{r \varphi^k}, \\ r = \frac{(r \varphi^k)^2}{S^{kk} + l \gamma^{kk}}, \\ r = \frac{\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} \left(\frac{l}{\varepsilon} \right)}{\varepsilon + \frac{(S_0^k)^2}{(r \varphi^k)^2 \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}}}. \end{array} \right.$$

Ayant choisi une valeur pour ε , la première relation détermine $r \varphi^k$ au signe près (signe que nous choisirons une fois pour toutes) en fonction de l et des données de Cauchy.

D'après les deux dernières relations, l doit être solution de l'équation suivante :

$$(II.22) \quad (S_l^i + l \gamma_l^i) (S_k^i + l \gamma_k^i) \gamma^{ij} + \frac{(S_0^k)^2}{\varepsilon^2} = \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} [S^{kk} + l \gamma^{kk}].$$

l étant choisi, r , φ^k et φ_{A_i} se trouvent alors déterminés d'après les quatre premières relations (II.21).

Enfin, d'après (II.18) et (II.20), $\partial_{A_i} \gamma_{A_i B_i}$ se trouve déterminé sur la variété Σ , à condition que ce ne soit pas une variété caractéristique. Il faut donc supposer $\gamma^{kk} \neq 0$.

La détermination sur Σ de r , l , φ^k , φ_{A_i} et $\partial_{A_i} \gamma_{A_i B_i}$ nécessite donc les conditions suivantes pour les données de Cauchy et le choix de l :

$$(II.23) \quad \left\{ \begin{array}{l} \gamma^{kk} \neq 0, \\ S^{kk} + l \gamma^{kk} > 0, \\ \varepsilon \gamma^{\lambda \mu} (S_\lambda^k + l \gamma_\lambda^k) (S_\mu^k + l \gamma_\mu^k) > 0. \end{array} \right.$$

Le système de conditions que doit satisfaire l , solution de (II.22), et les données de Cauchy, peut encore s'écrire

$$(II.24) \quad \begin{cases} \gamma^{44} \neq 0, \\ S^{44} + l \gamma^{44} = 0, \\ \varepsilon [l^2 \gamma^{44} + 2l S^{44} + \gamma^{\lambda\mu} S_{\lambda}^4 S_{\mu}^4] > 0. \end{cases}$$

Avec ces conditions, nous pouvons conclure, comme dans le cas unitaire extérieur, que toutes les dérivées secondes des potentiels $\gamma_{\alpha\beta}$ sont continues à la traversée de Σ (à un changement de coordonnées près conservant les coordonnées de tout point de Σ ainsi que les données de Cauchy).

b. Nous devons aussi étudier les conditions de conservation qui peuvent se traduire, comme nous l'avons vu, selon (II.13') et (II.14).

Écrivons (II.13') modulo une fonction des données de Cauchy, puis (II.14) covariante pour $\beta = 0$ et contravariante pour $\beta = 4$:

$$(II.25) \quad \begin{cases} r \partial_4 v^4 + v^4 (\partial_4 r - \varepsilon \partial_4 l) \sim 0, \\ r v^4 \partial_4 v_0 + \varepsilon v^4 v_0 \partial_4 l \sim 0, \\ r v^4 \partial_4 v^4 - [\gamma^{44} - \varepsilon (v^4)^2] \partial_4 l \sim 0. \end{cases}$$

De plus, en dérivant l'équation d'état par rapport à x^4 :

$$(II.26) \quad 2r \frac{v_0}{\xi^2} \partial_4 v_0 + \partial_4 r \left(\varepsilon + \frac{v_0^2}{\xi^2} \right) - \psi' \partial_4 l \sim 0$$

(ψ' désignant la dérivée de ψ par rapport à $\frac{l}{\xi}$).

Si v_0 et v^4 ne sont pas nuls, (II.25) et (II.26) entraînent que $\partial_4 r$ et $\partial_4 l$ satisfont le système

$$\begin{cases} - (v^4)^2 \partial_4 r + [2\varepsilon v_0^2 - \gamma^{44}] \partial_4 l \sim 0, \\ \left(\varepsilon + \frac{v_0^2}{\xi^2} \right) \partial_4 r - (\psi' + 2\varepsilon \frac{v_0^2}{\xi^2}) \partial_4 l \sim 0. \end{cases}$$

Donc $\partial_4 r$ et $\partial_4 l$ seront déterminés simultanément sur Σ seulement si

$$(II.27) \quad \begin{cases} (v^4)^2 (\psi' - 2) + \gamma^{44} \left(\varepsilon + \frac{v_0^2}{\xi^2} \right) \neq 0, \\ v_0 \neq 0, \\ v^4 \neq 0. \end{cases}$$

Enfin, $\partial_4 v_\lambda$ sera déterminé par l'équation (II.14), puisqu'elle entraîne

$$r v^\lambda \partial_4 v_\lambda + v^\lambda v_\lambda \partial_4 l - \partial_\lambda l \sim 0.$$

c. Supposons que $\gamma_{\alpha\beta}$, v_λ , r et l satisfassent sur Σ les équations

$$(II.28) \quad S_\lambda^4 = \Theta_\lambda^4,$$

$$(II.28') \quad v^\lambda v_\lambda = \varepsilon.$$

De plus, postulons que $\gamma_{\alpha\beta}$, v_λ , r et l satisfont partout

$$(II.29) \quad R_{A_1 B_1} = \Theta_{A_1 B_1} - \frac{1}{3} \gamma_{A_1 B_1} \Theta_\alpha^\alpha,$$

$$(II.29') \quad D_\alpha \Theta_\beta^\alpha = 0.$$

Pour simplifier l'écriture, nous avons posé

$$\Theta_{\alpha\beta} = r v_\alpha v_\beta - l \gamma_{\alpha\beta},$$

avec la relation

$$r \left(\varepsilon + \frac{v_\alpha^\alpha}{\gamma_\alpha^\alpha} \right) = \gamma_\alpha^\alpha \left(\frac{l}{\gamma} \right)$$

et les conditions

$$0 < l < \gamma_\alpha^\alpha \left(\frac{l}{\gamma} \right), \\ r > 0.$$

Les équations (II.28) et (II.29) entraînent sur Σ les relations

$$S_\beta^\alpha - \Theta_\beta^\alpha = 0,$$

$$\partial_{B_1} (S_\beta^\alpha - \Theta_\beta^\alpha) = 0.$$

Compte tenu de ces relations, on déduit de (II.29') :

$$\partial_\lambda (S_\lambda^4 - \Theta_\lambda^4) = 0 \quad \text{sur } \Sigma.$$

L'équation (II.28) est donc vérifiée au voisinage de Σ . De plus, (II.29) entraîne la condition (II.13), qui, multipliée par v^β , s'écrit

$$v^\alpha v^\beta D_\alpha v_\beta = 0$$

ou encore

$$v^\alpha \partial_\alpha (v^\beta v_\beta) = 0.$$

Donc $v^\beta v_\beta$ reste constant le long des lignes de courant et v^β , unitaire sur Σ , l'est aussi au voisinage de Σ . ε , ayant une valeur bien déterminée sur Σ , aura la même valeur en dehors de Σ .

On peut donc conclure que les équations (II.29) et (II.29') étant satisfaites partout, les équations (II.28) et (II.28'), supposées satisfaites sur Σ , le seront aussi au voisinage de Σ .

Le problème de Cauchy revient donc à la résolution de (II.29) et de (II.29'), les équations (II.29') se traduisent par les équations (II.13). Ce système admet une seule solution, si les conditions (II.24) et (II.27) sont satisfaites par les données de Cauchy et si l est solution de l'équation (II.22).

11. Variétés exceptionnelles mises en évidence par le problème de Cauchy. Ondes hydrodynamiques. Vitesse de propagation. —

A. L'étude précédente permet de conclure qu'il peut y avoir des discontinuités de r , l et v_λ à travers la variété Σ , cette variété ayant pour équation $x^4 = 0$.

a. si Σ est une variété caractéristique, c'est-à-dire telle que $\gamma^{44} = 0$;

b. si elle est telle que

$$S^{44} + l \gamma^{44} = 0,$$

en supposant r fini, cette condition entraîne $v^4 = 0$. Σ est alors tangente à une ligne de courant. De même la condition

$$\gamma^{\lambda\mu} (S_\lambda^4 + l \gamma_\lambda^4) (S_\mu^4 + l \gamma_\mu^4) = 0 \quad \text{entraîne} \quad v^4 = 0.$$

B. De plus, Σ ayant toujours pour équation $x^4 = 0$, $\partial_4 r$, $\partial_4 l$, $\partial_4 v_\lambda$ peuvent admettre des discontinuités si :

a. $v^4 = 0$: Σ est alors tangente à une ligne de courant.

b. $v_0 = 0$: Cette circonstance se produit, d'après (II.8), si la densité de charge μ est nulle;

c.

$$(II.30) \quad (\nu^4)^2 (\psi' - 2) + \gamma^{44} \left(\varepsilon + \frac{\nu_0^2}{\xi^2} \right) = 0.$$

Désignons par Σ^n les variétés satisfaisant cette relation. Notons que (II.30) prend la même forme dans V_4 quelle que soit la métrique conforme dont est munie V_4 . Si V_4 est munie de la métrique ds^{*2} , (II.30) s'écrit, puisque $\left(\varepsilon + \frac{\nu_0^2}{\xi^2} \right)$ est positif :

$$(\check{u}^4)^2 (\psi' - 2) + \check{g}^{44} = 0.$$

Si maintenant Σ^H (engendrée par des trajectoires du groupe d'isométries) se projette suivant la variété S^H d'équation $f(x^i) = 0$, elle satisfait la relation

$$(II.31) \quad \partial_i f \partial_j f [\dot{u}^i \dot{u}^j (\Psi' - 2) + \dot{g}^{ij}] = 0.$$

D'après (II.7) et (II.10), nous avons

$$(II.32) \quad \frac{d\rho}{d\left(\frac{p}{c^2}\right)} = \Psi' - 1$$

et (II.31) s'écrit

$$(II.33) \quad \partial_i f \partial_j f \left[\dot{u}^i \dot{u}^j \left(\frac{d\rho}{d\left(\frac{p}{c^2}\right)} - 1 \right) + \dot{g}^{ij} \right] = 0.$$

Pour $\varepsilon = +1$, nous retrouvons l'équation obtenue en relativité générale ([9], p. 41) qui généralise l'équation des fronts d'onde de l'hydrodynamique classique.

Évaluons la vitesse de propagation des fronts d'onde hydrodynamique. Pour cela rapportons V_4 à son repère propre, c'est-à-dire

choisissons $\vec{e}_3$ tel que

$$\vec{u} = \vec{e}_3.$$

Les vecteurs $\vec{e}_A$ sont orthonormés et perpendiculaires à $\vec{e}_3$.

Posons $n_i = \partial_i f$. n_i sont les composantes covariantes d'un vecteur normal à S^H .

(II.31) s'écrit alors

$$(n_i^2) (\Psi' - 2) + (n_3)^2 - \Sigma_{A1} (n_{A1}^2) = 0,$$

d'où, v désignant la vitesse de propagation de l'onde hydrodynamique :

$$\frac{1}{v^2} = \frac{1}{c^2} [1 + (\Psi' - 2)].$$

L'interprétation physique de la relativité générale imposant $v \leq c$, on doit avoir la condition

$$\Psi' \geq 2,$$

condition qui entraîne

$$\dot{g}^{ij} \partial_i f \partial_j f \leq 0.$$

Les variétés S^H sont donc orientées dans le temps ou tangentes au cône élémentaire de V_4 .

La vitesse v des ondes hydrodynamiques est ainsi, quelle que soit la valeur de ε :

$$(II.34) \quad v = \frac{c}{\sqrt{\frac{d\rho}{d\left(\frac{p}{c^2}\right)}}},$$

avec la condition

$$(II.35) \quad \frac{d\rho}{d\left(\frac{p}{c^2}\right)} \geq 1.$$

La valeur de v est celle obtenue en hydrodynamique classique par le théorème d'Hugoniot et en relativité générale, dans le schéma fluide parfait non chargé ([9], p. 43). Le cas limite $v = c$ entraîne

$$\rho = \frac{p}{c^2} + \text{Cte.}$$

Ce cas est le schéma fluide incompressible, qui correspond à la valeur limite c de la vitesse des ondes hydrodynamiques. Les derniers résultats, relatifs aux fronts d'ondes hydrodynamiques, sont identiques à ceux obtenus en relativité générale, dans le schéma fluide parfait non chargé.

Nous avons supposé V_4 munie de la métrique ξds^2 , mais nous vérifions facilement que les résultats sont indépendants de la métrique conforme choisie.

12. Invariance de r , l et v_λ par le groupe d'isométries. — Comme conséquence de l'étude du problème de Cauchy, nous allons montrer que

$$Xl = Xv_\lambda = Xr = 0.$$

Dans un système de coordonnées locales adaptées :

$$\begin{aligned} Xl &\equiv \partial_0 l, & Xr &\equiv \partial_0 r, \\ Xv_\lambda &\equiv v_\rho D_\lambda \xi^\rho + \xi^\rho D_\rho v_\lambda \equiv \partial_0 v_\lambda, \\ \partial_0 \gamma_{\alpha\beta} &\equiv 0. \end{aligned}$$

Nous devons donc démontrer que dans un système de coordonnées locales adaptées :

$$\partial_0 r = \partial_0 l = \partial_0 v_\lambda = 0.$$

L'équation (II.22) détermine l sur une surface Σ d'équation $x^i = \text{Cte}$. $\partial_0 S_\lambda^i$ étant nul en coordonnées adaptées, $\partial_0 l$ sera déterminé en dérivant (II.22) par rapport à x^0 :

$$\partial_0 l [(S^{ii} + l \gamma^{ii}) (2 - \psi') - \xi \psi \gamma^{ii}] = 0,$$

Équation qui peut s'écrire d'après (II.19) et (II.12) :

$$\partial_0 l \left[(v^i)^2 (2 - \psi') - \left(\varepsilon + \frac{v_0^2}{\xi^2} \right) \gamma^{ii} \right] = 0.$$

Donc $\partial_0 l$ est nul si Σ n'est pas un front d'onde hydrodynamique et, d'après (II.21), $\partial_0 v_\lambda$ et $\partial_0 r$ sont aussi nuls.

Donc r , l et v_λ sont invariants par le groupe d'isométries.

13. Prolongement à travers une hypersurface Σ d'un $d\sigma^2$ intérieur dans le schéma fluide parfait en un $d\sigma^2$ extérieur et inversement. — *a.* Considérons un $d\sigma^2$ satisfaisant les équations de champ du cas unitaire intérieur du schéma fluide parfait, dans un domaine D limité par une hypersurface Σ engendrée par des trajectoires du groupe d'isométries.

Cherchons s'il existe en dehors de D un $d\sigma^2$ extérieur se raccordant sur Σ avec le $d\sigma^2$ intérieur.

Rappelons que les $\gamma_{\alpha\beta}$ et leurs dérivées premières doivent être continus à la traversée de Σ . Or, si Σ a pour équation $x^i = 0$, les équations de champ du cas intérieur entraînent sur Σ :

$$S_j^i = \Theta_\lambda^i$$

et celles du cas extérieur ont pour conséquence :

$$S_j^i = 0,$$

où S_j^i dépend seulement des données de Cauchy sur Σ et au plus de leurs dérivées secondes.

Θ_λ^i est donc nécessairement nul sur Σ . L'annulation de $\Theta_{\lambda i}^i$ sur Σ entraîne dans le schéma fluide parfait :

$$v^i = 0.$$

De l'annulation de Θ_λ^i découle sur Σ :

$$l = 0.$$

D'après (II. 7), cette dernière condition détermine l'annulation de la pression sur Σ .

En conséquence, Σ doit être engendrée par des lignes de courant du $d\sigma^2$ intérieur, et l doit s'annuler sur Σ .

S'il en est ainsi, les données de Cauchy sur Σ associées au $d\sigma^2$ intérieur satisfont $S_\lambda^k = 0$.

Or, le problème de Cauchy du cas extérieur admet au voisinage de Σ une solution unique. Dans le schéma fluide parfait, le problème du prolongement à travers une hypersurface Σ de l'intérieur vers l'extérieur admet une solution, si Σ est engendrée par des lignes de courant du champ intérieur et si l s'annule sur Σ .

b. On ne peut rien conclure pour le problème du prolongement de l'extérieur vers l'intérieur : en effet, Σ doit être engendrée par des lignes de courant du $d\sigma^2$ intérieur, c'est donc une variété exceptionnelle du problème de Cauchy du cas intérieur, dans le schéma fluide parfait.

Les résultats obtenus dans ce paragraphe sont identiques à ceux obtenus en relativité générale.

14. Lemme préliminaire. — Avant de traduire dans V_4 les identités et les conditions de conservation de V_5 , établissons le lemme préliminaire suivant :

Si sur V_5 est défini un tenseur de composantes covariantes $B_{\alpha\beta}$, invariant par le groupe d'isométries, on peut calculer $D_{\underline{\beta}} B_{\underline{0}}^{\underline{\beta}}$ et $D_{\underline{\beta}} B_{\underline{i}}^{\underline{\beta}}$ en termes de V_4 par les formules

$$(II.36) \quad \begin{cases} D_{\underline{\beta}} B_{\underline{0}}^{\underline{\beta}} = \frac{1}{\xi^2} \nabla_{\underline{i}} [\xi^2 B_{\underline{0}}^{\underline{i}}], \\ D_{\underline{\beta}} B_{\underline{i}}^{\underline{\beta}} = \nabla_{\underline{j}} B_{\underline{i}}^{\underline{j}} + \frac{\partial_{\underline{j}} \xi}{\xi} B_{\underline{i}}^{\underline{j}} + \frac{\partial_{\underline{i}} \xi}{\xi} B_{\underline{0}}^{\underline{0}} - \frac{\beta}{2\xi^2} H_{\underline{i}\underline{j}} (B_{\underline{0}}^{\underline{j}} + B_{\underline{0}}^{\underline{i}}). \end{cases}$$

Nous supposons V_4 munie de la métrique quotient ds^2 . Comme toujours, nous nous plaçons en coordonnées locales adaptées. $B_{\alpha\beta}$ étant invariant par le groupe d'isométries

$$XB_{\alpha\beta} = 0,$$

or

$$XB_{\alpha\beta} \equiv \xi^\rho D_\rho B_{\alpha\beta} + B_{\rho\beta} D_\alpha \xi^\rho + B_{\alpha\rho} D_\beta \xi^\rho.$$

D'où, en coordonnées adaptées :

$$XB_{\alpha\beta} \equiv \partial_0 B_{\alpha\beta} = 0,$$

$B_{\alpha\beta}$ définit intrinsèquement dans V_4 un tenseur symétrique de composantes contravariantes B^{ij} , deux vecteurs de composantes contravariantes respectives B_0^i et B^j_0 et un scalaire B_{00} .

Supposons d'abord provisoirement, comme intermédiaire commode de calcul, la métrique de V_5 définie positive.

La structure de variété riemannienne en repère orthonormé est définie en un point x par les formules

$$\begin{aligned} d\vec{x} &= \omega_{\underline{\alpha}} \vec{e}_{\underline{\alpha}}, \\ d\vec{e}_{\underline{\alpha}} &= \omega_{\underline{\alpha}\underline{\beta}} \vec{e}_{\underline{\beta}}, \\ d\omega_{\underline{\alpha}} &= \omega_{\underline{\beta}} \wedge \omega_{\underline{\beta}\underline{\alpha}} = \frac{1}{2} C_{\underline{\lambda}\underline{\mu}\underline{\alpha}} \omega_{\underline{\lambda}} \wedge \omega_{\underline{\mu}}. \end{aligned}$$

Les repères étant orthonormés, $\omega_{\underline{\alpha}\underline{\beta}}$ est antisymétrique. Les coefficients de rotation de Ricci $\gamma_{\underline{\alpha}\underline{\beta}\underline{\lambda}}$ définis dans V_5 par

$$\omega_{\underline{\alpha}\underline{\beta}} = \gamma_{\underline{\alpha}\underline{\beta}\underline{\lambda}} \omega_{\underline{\lambda}}$$

satisfont donc la relation

$$\gamma_{\underline{\alpha}\underline{\beta}\underline{\lambda}} = -\gamma_{\underline{\beta}\underline{\alpha}\underline{\lambda}}.$$

De plus

$$\gamma_{\underline{\alpha}\underline{\beta}\underline{\lambda}} = \frac{1}{2} (C_{\underline{\alpha}\underline{\beta}\underline{\lambda}} + C_{\underline{\alpha}\underline{\lambda}\underline{\beta}} - C_{\underline{\beta}\underline{\lambda}\underline{\alpha}}).$$

On peut alors calculer les coefficients de rotation de Ricci de V_5 en fonction de ceux de V_4 , $\hat{\gamma}_{\underline{l}\underline{j}\underline{k}}$ (cf. [35], p. 117), du tenseur $H_{\underline{l}\underline{j}}$ et du scalaire ξ définis dans V_4 . On obtient les résultats suivants :

$$(II.37) \quad \left\{ \begin{aligned} \gamma_{\underline{l}\underline{0}\underline{0}} &= \frac{\partial_l \xi}{\xi}, \\ \gamma_{\underline{l}\underline{j}\underline{0}} &= \frac{\beta H_{\underline{l}\underline{j}}}{2\xi^2} = \gamma_{\underline{l}\underline{0}\underline{j}} = \gamma_{\underline{j}\underline{0}\underline{l}}, \\ \gamma_{\underline{l}\underline{j}\underline{k}} &= \hat{\gamma}_{\underline{l}\underline{j}\underline{k}}, \end{aligned} \right.$$

$\partial_{\underline{\alpha}}$ désigne l'opérateur de dérivation pfaffienne par rapport à $\omega_{\underline{\alpha}}$.

(¹) Dans ce paragraphe, tout indice répété deux fois sera sommé.

Nous nous proposons de calculer $D_{\beta} B_0^{\beta}$ en termes de V_4 . Pour cela, considérons séparément $D_0 B_0^0$ et $D_j B_0^j$:

$$\begin{aligned} D_0 B_0^0 &= D_0 B_{00} = -\gamma_{0\rho 0} B_{\rho 0} - \gamma_{0\rho 0} B_{0\rho} \\ &= -2 \gamma_{0j 0} B_{j0} = 2 \frac{\partial_j \xi}{\xi} B_0^j. \end{aligned}$$

Par un calcul analogue, nous avons

$$\begin{aligned} D_j B_0^j &= D_j B_{0j} = \partial_j B_{0j} - \gamma_{0\rho j} B_{\rho j} - \gamma_{j\rho j} B_{0\rho} \\ &= \partial_j B_{0j} - \gamma_{0mj} B_{mj} - \gamma_{j0j} B_{00} - \gamma_{jmj} B_{0m} \\ &= \partial_j B_{0j} - \frac{\xi}{2} H_{jm} B_{mj} - \frac{\xi}{2} H_{jj} B_{00} - \hat{\gamma}_{jmj} B_{0m} \\ &= \nabla_j B_0^j. \end{aligned}$$

Donc si la métrique de V_5 est définie positive, nous avons

$$(II.38) \quad D_{\beta} B_0^{\beta} = \frac{1}{\xi^2} \nabla_j [\xi^2 B_0^j].$$

Transformons cette dernière égalité, lorsque V_5 est rapportée à une métrique de signature hyperbolique normale :

$$d\sigma^2 = -(\omega^0)^2 - (\omega^1)^2 - (\omega^2)^2 - (\omega^3)^2 + (\omega^4)^2,$$

$d\sigma^2$ se transforme en une métrique positive :

$$d\sigma^2 = +(\omega^{0'})^2 + (\omega^{1'})^2 + (\omega^{2'})^2 + (\omega^{3'})^2 + (\omega^{4'})^2,$$

en faisant les transformations suivantes :

$$\begin{aligned} \omega^{A_1'} &= +i \omega^{A_1} & (A_1 = 0, 1, 2, 3), \\ \omega^{4'} &= \omega^4. \end{aligned}$$

Les coefficients non nuls de la matrice de changement de coordonnées sont alors

$$A_{4'}^4 = 1, \quad A_{A_1'}^{A_1} = -i.$$

Les composantes d'un tenseur, relatives à la métrique positive, se déduisent de celles relatives à la métrique de signature hyperbolique normale par la règle suivante : pour un indice contravariant (resp. covariant) 0, 1, 2, 3, la composante du tenseur est multipliée par i (resp. $-i$), pour un indice 4, la composante est inchangée.

De plus, ω^0 et $\omega^{0'}$ étant définis par

$$\begin{aligned}\omega^0 &= \xi (dx^0 + \beta \varphi_i dx^i), \\ \omega^{0'} &= \xi' (dx^0 + \beta \varphi_i dx^i),\end{aligned}$$

il vient

$$\xi' = i\xi.$$

Donc pour passer d'une métrique de signature positive à une métrique de signature hyperbolique normale, il faudra remplacer ξ par $i\xi$.

D'après ce qui précède, il est alors évident que l'égalité (II.38) est inchangée en métrique de signature hyperbolique normale. Ayant démontré la première formule (II.36), nous allons démontrer la deuxième par la même méthode.

Nous allons exprimer $D_0 B_{\underline{i}}^0$ et $D_j B_{\underline{i}}^j$ en métrique définie positive :

$$\begin{aligned}D_0 B_{\underline{i}}^0 &= D_0 B_{\underline{i} \underline{0}} = -\gamma_{\underline{i} \underline{0} \underline{0}} B_{\underline{0} \underline{0}} - \gamma_{\underline{0} \underline{0} \underline{0}} B_{\underline{i} \underline{0}} \\ &= -\gamma_{\underline{i} \underline{0} \underline{0}} B_{\underline{0} \underline{0}} - \gamma_{\underline{i} \underline{m} \underline{0}} B_{\underline{m} \underline{0}} - \gamma_{\underline{0} \underline{m} \underline{0}} B_{\underline{i} \underline{m}} \\ &= -\frac{\partial_i \xi}{\xi} B_{\underline{0} \underline{0}} - \frac{\beta}{2\xi^2} H_{\underline{i} \underline{j}} B_{\underline{j} \underline{0}} + \frac{\partial_j \xi}{\xi} B_{\underline{i} \underline{j}}.\end{aligned}$$

De même nous allons exprimer $D_j B_{\underline{i}}^j$ en termes de V_4 :

$$\begin{aligned}D_j B_{\underline{i}}^j &= D_j B_{\underline{i} \underline{j}} = \partial_j B_{\underline{i} \underline{j}} - \gamma_{\underline{i} \underline{j} \underline{j}} B_{\underline{0} \underline{j}} - \gamma_{\underline{j} \underline{j} \underline{j}} B_{\underline{i} \underline{0}} \\ &= \partial_j B_{\underline{i} \underline{j}} - \gamma_{\underline{i} \underline{m} \underline{j}} B_{\underline{m} \underline{j}} - \gamma_{\underline{j} \underline{m} \underline{j}} B_{\underline{i} \underline{m}} - \frac{\beta}{2\xi^2} H_{\underline{i} \underline{j}} B_{\underline{0} \underline{j}} \\ &= \nabla_j B_{\underline{i} \underline{j}} - \frac{\beta}{2\xi^2} H_{\underline{i} \underline{j}} B_{\underline{0} \underline{j}}.\end{aligned}$$

Donc, en métrique définie positive, nous avons

$$(II.39) \quad D\beta B_{\underline{i}}^{\beta} = \nabla_j B_{\underline{i}}^j - \frac{\beta}{2\xi^2} H_{\underline{i} \underline{j}} (B_{\underline{0}}^j + B_{\underline{0}}^j) + \frac{\partial_j \xi}{\xi} B_{\underline{i}}^j - \frac{\partial_i \xi}{\xi} B_{\underline{0} \underline{0}}.$$

D'après la règle énoncée plus haut, cette dernière égalité devient en métrique de signature hyperbolique normale :

$$(II.40) \quad D\beta B_{\underline{i}}^{\beta} = \nabla_j B_{\underline{i}}^j - \frac{\beta}{2\xi^2} H_{\underline{i} \underline{j}} (B_{\underline{0}}^j + B_{\underline{0}}^j) + \frac{\partial_j \xi}{\xi} B_{\underline{i}}^j + \frac{\partial_i \xi}{\xi} B_{\underline{0} \underline{0}}.$$

15. Identités et conditions de conservation de V_3 traduites dans V_4 .

Les formules (II.36) vont nous permettre de traduire les identités de conservation en termes de V_4 . Les conditions de conservation de

V_5 sont équivalentes à des conditions de conservation de V_4 , qu'on pourrait d'ailleurs obtenir directement à partir d'identités de V_4 et des équations de champ de V_4 . Dans ce paragraphe, la variété V_4 sera supposée munie de la métrique ds^2 et non de la métrique conforme ξds^2 . De plus, nous ne nous placerons pas dans un schéma particulier, c'est-à-dire nous ne préciserons pas la forme du tenseur impulsion-énergie.

a. D'après (II.36) l'identité $D_{\underline{\beta}} S_{\underline{\alpha}}^{\underline{\beta}} = 0$ se traduit en termes de V_4 par les identités

$$(II.41) \quad \begin{cases} \nabla_j [\xi^2 S_{\alpha}^j] = 0, \\ \nabla_j S_{\underline{\alpha}}^j - \frac{\beta}{\xi^2} H_{\underline{\alpha} j} S_{\underline{\alpha}}^j + \frac{\partial_i \xi}{\xi} S_{\underline{\alpha} 0} + \frac{\partial_j \xi}{\xi} S_{\underline{\alpha}}^j = 0. \end{cases}$$

D'après (I.9) et (I.10), ces identités peuvent s'écrire en repères naturels de V_4 :

$$(II.42) \quad \nabla_j \nabla_m H^{mj} = 0,$$

$$(II.43) \quad \nabla_j [\xi \hat{S}_i^j - 2\pi c^2 \beta^2 \tau_i^j - \nabla_i \partial^j \xi + \delta_i^j \Delta \xi] - \frac{\beta^2}{2\xi^3} H_{ij} \nabla_m H^{mj} + \partial_i \xi \left(\frac{1}{2} \hat{R} + \frac{3}{8} \beta^2 \xi^2 F_{mn} F^{mn} \right) = 0.$$

L'identité (II.42) est évidente compte tenu seulement de l'antisymétrie de H_{mj} .

(II.43) est entraînée par les identités suivantes qu'on vérifie immédiatement :

$$(II.44) \quad \begin{cases} \nabla_j \hat{S}_i^j = 0, \\ -\nabla_j (\nabla_i \partial^j \xi - \partial_i^j \Delta \xi) + \partial_j \xi \hat{S}_i^j + \frac{1}{2} \partial_i \xi \hat{R} = 0, \\ -2\pi c^2 \beta^2 \nabla_j \tau_i^j - \frac{\beta^2}{2\xi^2} H_{ij} \nabla_m H^{mj} + \frac{3}{8} \beta^2 \xi^2 F_{mn} F^{mn} \partial_i \xi = 0. \end{cases}$$

Les identités de conservation de V_5 sont équivalentes aux identités de V_4 précédentes.

b. On peut employer plusieurs méthodes pour traduire en termes de V_4 les conditions de conservation de V_5 . Par exemple, les iden-

tités (II.41) et les équations de champ de V_3 entraînent les conditions suivantes :

$$(II.45) \quad \begin{cases} \nabla_j [\xi^2 \Theta_0^j] = 0, \\ \nabla_j \Theta_0^j - \frac{\beta}{\xi^2} \Pi_{-j} \Theta_0^j + \frac{\partial_i \xi}{\xi} \Theta_{00} + \frac{\partial_j \xi}{\xi} \Theta_{-j}^j = 0. \end{cases}$$

Rappelons que Θ_0^i et Θ_{00} définissent intrinsèquement dans V_4 un vecteur et un scalaire. De plus, Θ^{ij} définit intrinsèquement dans V_4 un tenseur $\hat{\Theta}^{ij}$ tel que

$$\Theta^{ij} = \hat{\Theta}^{ij},$$

Les relations suivantes sont alors vérifiées :

$$\begin{aligned} \Theta_{-}^j &= \hat{\Theta}_{-}^j, \\ \hat{\Theta}_i^j &= g_{im} \Theta^{mj}, \\ \Theta_{00} &= \frac{1}{\xi^2} \Theta_{00}, \\ \Theta_{-}^j &= \Lambda_{-}^j \frac{\Theta_0^j}{\xi}. \end{aligned}$$

Les conditions (II.45) deviennent alors en coordonnées locales :

$$(II.46) \quad \begin{cases} \nabla_j [\xi \Theta_0^j] = 0, \\ \nabla_j \hat{\Theta}_0^j - \beta F_{ij} \Theta_0^j + \frac{\partial_i \xi}{\xi^3} \Theta_{00} + \frac{\partial_j \xi}{\xi} \hat{\Theta}_i^j = 0. \end{cases}$$

Compte tenu des équations de champ de V_3 traduites dans V_4 (II.4) et des identités (II.44), les conditions (II.46) peuvent s'écrire

$$(II.47) \quad \begin{cases} \nabla_j [\xi \Theta_0^j] = 0, \\ \nabla_j \left[\hat{\Theta}_0^j + \frac{\beta^2}{\xi} 2\pi c^2 \tau_0^j + \frac{1}{\xi} (\nabla_i \partial^i \xi - \partial^j \Delta \xi) \right] = 0. \end{cases}$$

Or, les conditions de conservation, écrites sous la forme (II.47), pourraient être obtenues directement à partir des équations de champ (II.4) et des conditions entraînées par les identités de V_4 :

$$\begin{aligned} \nabla_j \hat{S}_i^j &= 0, \\ \nabla_j \nabla_m \Pi^{mj} &= 0. \end{aligned}$$

Donc les conditions de conservation (II.46) et (II.47) sont équivalentes, compte tenu des équations de champ et des identités (II.42) et (II.44).

16. **Conditions de conservation dans le schéma fluide parfait.** — Nous nous proposons d'écrire les conditions de conservation du schéma fluide parfait, dans V_4 munie de la métrique $ds^2 = \xi ds^2$.

Pour cela, transformons les conditions de conservation, écrites sous la forme (II.46), de façon à les obtenir en termes de V_4 , munie de la métrique $d\tilde{s}^2 = \xi ds^2$.

De simples calculs entraînent

$$(II.48) \quad \begin{cases} \xi^2 \check{\nabla}_j \left(\frac{\Theta_0^j}{\xi} \right) = \nabla_j (\xi \Theta_0^j), \\ \check{\nabla}_j \Theta^{ij} = \nabla_j \Theta^{ij} + 3 \frac{\partial_j \xi}{\xi} \Theta^{ij} + \frac{\partial^i \xi}{2\xi} \hat{\Theta}^j_j \end{cases}$$

et le système (II.46) devient

$$(II.49) \quad \begin{cases} \check{\nabla}_j \left[\frac{\Theta_0^j}{\xi} \right] = 0, \\ \check{\nabla}_j \Theta^{ij} - 2 \frac{\partial_j \xi}{\xi} \Theta^{ij} + \frac{\partial^i \xi}{2\xi} \hat{\Theta}^j_j - \beta F^i_j \Theta_0^j + \frac{\partial^i \xi}{\xi^3} \Theta_{00} = 0. \end{cases}$$

En tenant compte de l'expression de Θ_0^i dans le schéma fluide parfait et de (II.6') et (II.6''), la première équation s'écrit

$$(II.50) \quad \boxed{\check{\nabla}_j [\mu \check{u}^j] = 0.}$$

C'est l'équation de conservation de l'électricité : elle pourrait se déduire immédiatement des équations de champ.

La deuxième équation du système (II.49) s'écrit dans le schéma fluide parfait :

$$(II.51) \quad \check{\nabla}_j \left[r \left(\varepsilon + \frac{\nu_0^2}{\xi^2} \right) \xi \check{u}^i \check{u}^j - l \xi \check{g}^{ij} \right] - \beta F^i_j r \nu_0 \check{u}^j \sqrt{\xi} \sqrt{\varepsilon + \frac{\nu_0^2}{\xi^2}} \\ - 2 \frac{\partial_j \xi}{\xi} \left[r \xi \left(\varepsilon + \frac{\nu_0^2}{\xi^2} \right) \check{u}^i \check{u}^j - l \xi \check{g}^{ij} \right] \\ + \frac{\partial^i \xi}{2\xi} \left[r \left(\varepsilon + \frac{\nu_0^2}{\xi^2} \right) - 4l \right] + \frac{\partial^i \xi}{\xi^3} (r \nu_0^2 + l \xi^2) = 0.$$

Cette équation, multipliée par $\check{u}_i$, entraîne

$$(II.52) \quad \check{\nabla}_j \left[r \left(\varepsilon + \frac{\nu_0^2}{\xi^2} \right) \frac{\check{u}^j}{\xi} \right] - \check{u}^j \frac{\partial_j l}{\xi} - r \left(\frac{\varepsilon}{2} + \frac{3}{2} \frac{\nu_0^2}{\xi^2} \right) \check{u}^j \partial_j \frac{1}{\xi} = 0.$$

Le système (II.51) est alors équivalent au système formé par (II.52) et l'équation suivante :

$$(II.53) \quad r \left(\varepsilon + \frac{v_0^2}{\xi^2} \right) \xi \dot{u}^j \dot{\nabla}_j \dot{u}_i + \xi \dot{u}_i \dot{u}^j \partial_j l - r \dot{u}_i \dot{u}^j \partial_j \xi \left(\frac{\varepsilon}{2} + \frac{3}{2} \frac{v_0^2}{\xi^2} \right) - \frac{1}{\xi} \partial_i l + \frac{r}{2} \left(3 \frac{v_0^2}{\xi^2} + \varepsilon \right) \partial_i \xi - \beta \xi \dot{F}_{ij} r v_0 \dot{u}^j \sqrt{\xi} \sqrt{\varepsilon + \frac{v_0^2}{\xi^2}} = 0.$$

D'après (II.7) le système formé par (II.52) et (II.53) peut s'écrire

$$(II.54) \quad \dot{\nabla}_j \left[\left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) \dot{u}^j \right] - \frac{\dot{u}^j}{\xi} \partial_j \left(\xi \frac{p}{c^2} \right) + \left(z + \frac{p}{c^2} \right) \left(\frac{1}{2} + \frac{\Lambda^2}{\xi^2} \right) \dot{u}^j \partial_j \xi = 0.$$

$$(II.55) \quad \dot{u}^j \dot{\nabla}_j \dot{u}_i = \frac{1}{\xi \chi \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right)} \left[\partial_i \left(\xi \frac{p}{c^2} \right) - \dot{u}_i \dot{u}^j \partial_j \left(\xi \frac{p}{c^2} \right) \right] + \frac{1}{c^2 \left(z + \frac{p}{c^2} \right)} \dot{u}^j \dot{F}_{ij} + \left[\frac{1}{2} + \frac{\Lambda^2}{4 G \xi \left(z + \frac{p}{c^2} \right)^2} \right] \times \left(\partial_j \xi \dot{u}^j \dot{u}_i - \frac{\partial_i \xi}{\xi} \right).$$

En définitive, les conditions de conservation du schéma fluide parfait se traduisent dans V_1 par l'équation de conservation de l'électricité (II.50), l'équation de continuité (II.54), et les équations de mouvement (II.55).

L'équation (II.50) est exactement celle de la théorie provisoire de l'électromagnétisme; pour $\xi = 1$, les équations (II.54) et (II.55) se réduisent aux conditions de conservation de la théorie provisoire de l'électromagnétisme.

CHAPITRE III.

RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS APPROCHÉES DE CHAMP.

CALCUL EFFECTIF EN PREMIÈRE APPROXIMATION.

Ce chapitre a pour but :

a. La détermination de la solution des équations approchées du champ des cas extérieur et intérieur. Nous effectuerons les calculs effectifs en première approximation, lorsque la variété V_3 admet N domaines intérieurs possédant la symétrie sphérique dans W_3 .

b. La détermination de la solution des équations approchées du champ du cas extérieur et des conditions approchées d'isothermie, à l'extérieur de N singularités ponctuelles, à symétrie sphérique. Un calcul effectif sera fait en première approximation. Tout d'abord, nous précisons les hypothèses satisfaites par le tenseur fondamental.

17. Hypothèses sur le tenseur métrique. — *a.* Le champ est supposé quasi galiléen : $\gamma_{\alpha\beta}$ admet un développement limité suivant les puissances de $\frac{1}{c^2}$. De plus

$$\gamma_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + O\left(\frac{1}{c}\right),$$

où

$$\eta_{A,B_1} = -\delta_{A_1}^{B_1}, \quad \eta_{4\alpha} = \delta_4^\alpha.$$

b. Le champ admet un comportement asymptotique euclidien sur chaque section d'espace W_3 .

W_3 est douée d'une structure de variété riemannienne sur laquelle est définie la métrique

$$d\bar{s}^2 = \xi g_{AB} dx^A dx^B.$$

Posons

$$\bar{g}_{AB} = \xi g_{AB}.$$

Comme en relativité générale, nous supposons que le système de coordonnées de V_4 est interprétable dans l'espace et le temps, c'est-à-dire :

α . que les lignes le long desquelles x^4 varie seul sont orientées dans le temps. Il faut donc $g_{44} > 0$;

β . que les hypersurfaces $x^4 = \text{Cte}$ sont orientées dans l'espace. D'où $g^{44} > 0$. La forme quadratique $d\bar{s}^2$ est donc définie positive.

Rappelons qu'on peut choisir comme distance $d(x, x')$ de deux points x, x' appartenant à W_3 : la borne inférieure des longueurs des chemins continûment différentiables joignant x et x' . $d(x, x')$ satisfait bien les propriétés de la distance et définit une structure d'espace métrique sur W_3 .

Après ces préliminaires, nous pouvons définir sur W_3 le comportement asymptotique euclidien du tenseur métrique.

Désignons par a un point fixe de W_3 et par x un point variable. Posons

$$r = d(a, x).$$

Soit E_3 l'espace euclidien à trois dimensions muni de la métrique — $\delta_{AB} dx^A dx^B$.

Le champ a un comportement asymptotique euclidien sur W_3 si :

a . W_3 admet un domaine à l'infini, c'est-à-dire s'il existe des points x tels que $d(a, x) > R$, où R est un nombre arbitrairement grand, positif.

b . On peut trouver R arbitrairement grand tel que l'ensemble des points x satisfaisant $d(a, x) > R$ soit homéomorphe au complémentaire d'une boule fermée de E_3 .

c . On peut trouver un nombre $M > 0$ tel qu'on ait pour $d(a, x) > R$:

$$|\gamma_{\alpha\beta} - \eta_{\alpha\beta}| < \frac{M}{\rho},$$

$$|\partial_\mu \gamma_{\alpha\beta}| < \frac{M}{\rho^2},$$

ρ désigne la distance euclidienne du point x à l'origine dans E_3 .

D'après la définition précédente, dans la région de W_3 définie par $d(a, x) > R$, on peut écrire

$$-\delta_{AB} = \bar{g}_{AB} + \frac{m_{AB}}{r},$$

les m_{AB} étant bornés en valeur absolue. En bornant supérieurement $d\bar{s}$ il vient, d'après cette égalité

$$\rho < K_1 r \quad \text{et} \quad r < K_2 \rho,$$

K_1 et K_2 étant des nombres positifs fixes. Donc, les points à l'infini de W_3 sont les points à l'infini de E_3 .

De plus, la définition précédente est indépendante du point a choisi dans W_3 .

18. Solution globale des équations approchées de champ, en coordonnées isothermes. — Cette recherche est amenée par l'étude des problèmes globaux faites par A. Lichnerowicz [32] et Y. Thiry [35].

Nous supposons que V_3 comprend N régions balayées par une distribution finie de masses et de charges, ces N régions étant représentées dans chaque section d'espace W_3 par N domaines. Nous nous proposons de déterminer, par un calcul approché, la métrique telle que :

a. Dans les N régions balayées par une distribution énergétique de masses et de charges, limitées par des hypersurfaces Σ (engendrées par des trajectoires du groupe d'isométrie), elle soit régulière et satisfasse aux équations d'Einstein du cas intérieur.

b. Dans la région ne contenant aucune distribution de masses et de charges, elle soit régulière et satisfasse aux équations de champ du cas extérieur.

c. Sur les hypersurfaces frontière Σ , les $\gamma_{\alpha\beta}$ et leurs dérivées premières se raccordent.

Le tenseur d'impulsion-énergie représentant l'état des distributions énergétiques, sera celui du schéma fluide parfait. Les calculs seront menés en prenant comme inconnue la densité tensorielle $\Gamma^{\alpha\beta} = \gamma^{\alpha\beta} \sqrt{\gamma}$, où γ désigne le déterminant des $\gamma_{\alpha\beta}$. Un système de coordonnées privilégiées, appelées coordonnées isothermes, permet de simplifier les calculs.

Un système de coordonnées est dit isotherme si les quatre familles de variétés d'équation $x^\rho = \text{Cte}$, sont des variétés isothermes, c'est-à-dire si

$$(III.1) \quad F^\rho = -\gamma^{\alpha\beta} \Gamma_{\alpha\beta}^\rho = \frac{\partial_\alpha \Gamma^{\alpha\rho}}{\sqrt{\gamma}} = 0.$$

F. Hennequin [27] a démontré l'existence et l'unicité des coordonnées isothermes au voisinage d'un plan $x^4 = 0$ ainsi que la compatibilité des coordonnées isothermes avec les coordonnées adaptées.

Les équations de champ en coordonnées isothermes sont alors

$$(III.2) \quad S_{(i)}^{\alpha\beta} = \theta^{\alpha\beta},$$

$S_{(i)}^{\alpha\beta}$ désigne l'expression de $S^{\alpha\beta}$ en coordonnées isothermes.

Des calculs directs ([3], p. 147), donnent

$$(III.3) \quad S_{(t)}^{\alpha\beta} \sqrt{\gamma} \equiv \frac{\square \Gamma^{\alpha\beta}}{2} - \gamma^{\lambda\mu} \Gamma_{\lambda}^{\alpha} \partial_{\mu} \Gamma^{\beta} - \Gamma_{\lambda\mu}^{\alpha} \Gamma_{\nu\rho}^{\beta} \gamma^{\lambda\nu} \gamma^{\mu\rho} \sqrt{\gamma} \\ + \Gamma^{\alpha\beta} \left[\frac{\gamma^{\lambda\mu} \Gamma_{\lambda}^{\alpha} \Gamma_{\mu}^{\beta}}{2} + \frac{\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}}{4} \partial_{\lambda} \gamma^{\mu\nu} \right],$$

$\square$ représente l'opérateur $\gamma^{\lambda\mu} \partial_{\lambda\mu}$.

Nous avons posé

$$\Gamma_{\lambda} = \Gamma_{\lambda\rho}^{\rho}.$$

Un calcul effectif de la solution des équations de champ sera fait en première approximation.

Les équations de champ en coordonnées quelconques entraînent les conditions de conservation ou équations de mouvement :

$$D_{\alpha} \Theta_{\beta}^{\alpha} = 0.$$

Une étude des méthodes d'approximation a été faite par F. Hennequin [27]. Elle a établi le résultat suivant que nous utiliserons :

Pour une solution approchée des équations de champ (cas intérieur et extérieur) en coordonnées isothermes, les équations approchées de mouvement d'ordre l entraînent la vérification des conditions approchées d'isothermie d'ordre l .

Rappelons que ce résultat a été établi en utilisant les relations

$$(III.4) \quad S_{(t)}^{\alpha\beta} = S^{\alpha\beta} + \Lambda z^{\beta},$$

$$(III.5) \quad \Lambda^{\alpha\beta} \equiv \frac{1}{2} [\gamma^{\alpha\rho} \partial_{\rho} F^{\beta} + \gamma^{\beta\rho} \partial_{\rho} F^{\alpha} - F^{\rho} \partial_{\rho} \gamma^{\alpha\beta} - \gamma^{\alpha\beta} (\partial_{\rho} F^{\rho} + \Gamma_{\rho\lambda}^{\rho} F^{\lambda})],$$

$$(III.6) \quad 2 D_{\alpha} \Lambda^{\alpha\beta} = \gamma^{\lambda\mu} \partial_{\lambda\mu} F^{\beta} + \gamma^{\lambda\mu} \Gamma_{\rho\mu}^{\beta} \partial_{\lambda} F^{\rho} - F^{\rho} \partial_{\rho} \gamma^{\lambda\mu} \Gamma_{\lambda\mu}^{\beta}.$$

Donc la solution approchée des équations de champ en coordonnées isothermes est une solution particulière approchée des équations de champ en coordonnées quelconques.

Ce résultat et l'unicité physique de la solution des équations de champ entraînent la proposition suivante :

Toutes les solutions approchées des équations de champ en coordonnées quelconques se déduisent tensoriellement de la solution approchée des équations de champ en coordonnées isothermes.

19. Solution des équations approchées de champ du cas extérieur et des conditions approchées d'isothermie. — Un deuxième problème, introduit par les travaux d'Einstein, Infeld, Hoffmann [12], est celui de la résolution des équations de champ du cas extérieur dans un système de coordonnées isothermes, lorsque le champ extérieur possède N singularités ponctuelles à symétrie sphérique. Ce travail a pour but d'établir les équations de mouvement, sans l'introduction d'un tenseur impulsion-énergie particulier.

Einstein trouvait en effet peu satisfaisant d'utiliser ce dernier.

Il nous semble que les résultats rappelés à la fin du paragraphe précédent peuvent servir de justification de ce deuxième problème, sans faire intervenir un tenseur impulsion-énergie particulier.

En effet, la dernière proposition entraîne qu'une solution particulière du champ extérieur satisfait les équations approchées :

$$(III.7) \quad \begin{cases} S^{\alpha\beta} = 0, \\ F^{\beta} = 0 \end{cases}$$

ou le système équivalent

$$(III.8) \quad \begin{cases} S_{(i)}^{\alpha\beta} = 0, \\ F^{\beta} = 0. \end{cases}$$

Le champ extérieur présente nécessairement des singularités à l'intérieur de la matière. Il sera dit singulier en un point s'il n'est pas régulier en ce point. En fait, les singularités devraient représenter la matière : dans un calcul effectif relatif à la première méthode, nous devons faire des hypothèses sur les domaines intérieurs, dans un calcul concernant la seconde nous devons faire des hypothèses sur les singularités.

Nous généralisons l'hypothèse d'Einstein en relativité générale et supposons que le champ extérieur possède N singularités ponctuelles, à symétrie sphérique.

Nous montrerons l'unicité de la solution approchée de (III.8) en la calculant effectivement (en première approximation en théorie de Jordan-Thiry, en première et deuxième approximation en théorie de Kaluza-Klein) et en supposant que le champ extérieur admet N singularités ponctuelles, à symétrie sphérique.

En nous basant toujours sur les résultats du paragraphe précédent, toute solution du champ extérieur doit se déduire tensoriellement de la solution de (III.8).

L'hypothèse sur les N singularités ponctuelles à symétrie sphérique revient à prendre comme solution de l'équation de Laplace, $\Delta u = 0$:

$$(III.9) \quad u = \sum_s \frac{\alpha_s}{r_s},$$

où α_s est une fonction dépendant seulement de la variable temporelle.

r_s désigne la distance euclidienne, en repères orthonormés, du point courant de W_3 (homéomorphe à E_3) à la $s^{\text{ième}}$ singularité G_s .

20. Calcul en première approximation des développements limités des $\gamma^{\alpha\beta}$ connaissant ceux des $\gamma_{\alpha\beta}$. — Posons

$$(III.10) \quad \gamma_{\alpha\beta} = r_{\alpha\beta} + \frac{\gamma_{\alpha\beta}^{(1)}}{c} + \dots + \frac{\gamma_{\alpha\beta}^{(p)}}{c^p} + \dots$$

$$(III.11) \quad \gamma^{\alpha\beta} = \gamma_{(0)}^{\alpha\beta} + \frac{\gamma_{(1)}^{\alpha\beta}}{c} + \dots + \frac{\gamma_{(p)}^{\alpha\beta}}{c^p} + \dots$$

La matrice $(\gamma^{\alpha\beta})$ étant la matrice inverse de $(\gamma_{\alpha\beta})$, il vient

$$\eta_{\alpha\rho} \gamma_{(0)}^{\rho\beta} = \delta_{\alpha}^{\beta}.$$

Donc pour $\alpha \neq \beta$,

$$\gamma_{(0)}^{\alpha\beta} = 0$$

et pour $\alpha = \beta$, nous obtenons

$$\gamma^{\Lambda_1 \Lambda_1} = -1,$$

$$\gamma^{44} = +1;$$

d'où

$$(III.12) \quad \gamma_{(0)}^{\alpha\beta} = r_{\alpha\beta}.$$

Supposons maintenant que $\gamma_{\alpha\beta}^{(p)}$ soit le premier coefficient du développement de $\gamma_{\alpha\beta}$ d'ordre ≥ 1 qui ne soit pas nul.

De $\gamma_{\alpha\rho} \gamma^{\rho\beta} = \delta_{\alpha}^{\beta}$, nous déduisons

$$\gamma_{(1)}^{\alpha\beta} = \dots = \gamma_{(p-1)}^{\alpha\beta} = 0.$$

Donc $\gamma_{(p)}^{\alpha\beta}$ est le premier coefficient du développement de $\gamma^{\alpha\beta}$ d'ordre ≥ 1 qui ne soit pas nul.

De plus

$$\eta_{\alpha\alpha} \gamma_{(p)}^{\alpha\beta} + \eta_{\beta\beta} \gamma_{\alpha\beta}^{(p)} = 0.$$

Cette dernière relation dans laquelle il n'y a pas de sommation par rapport à α et β , se traduit par les relations suivantes :

$$(III.13) \quad \begin{cases} \gamma_{(p)}^{A_1 B_1} = -\gamma_{A_1 B_1}^{(p)}, \\ \gamma_{(p)}^{k k} = -\gamma_{k k}^{(p)}, \\ \gamma_{(p)}^{A_1 A_1} = \gamma_{A_1 A_1}^{(p)}. \end{cases}$$

Les relations (III.12) et (III.13) déterminent en première approximation le développement limité de $\gamma^{\alpha\beta}$ connaissant celui de $\gamma_{\alpha\beta}$ et inversement.

21. Expression du tenseur impulsion-énergie du schéma fluide parfait, en première approximation. — Dans le schéma fluide parfait, le tenseur impulsion-énergie est

$$\Theta^{\alpha\beta} = r \nu^\alpha \nu^\beta - l \gamma^{\alpha\beta},$$

où r , l et ν_0 sont déterminés par (II.8).

Ayant $l = O\left(\frac{1}{c^4}\right)$, en première approximation, le schéma fluide parfait se réduit au schéma matière pure. En développant r et ν_0 d'après (II.8), nous obtenons

$$(III.14) \quad \begin{cases} r = \varepsilon \frac{8\pi G \rho}{c^2} \left(1 - \frac{\mu^2}{4G\rho^2}\right) + O\left(\frac{1}{c^4}\right), \\ \nu_0 = -\frac{\mu}{2\sqrt{G\rho}\sqrt{\varepsilon\left(1 - \frac{\mu^2}{4G\rho^2}\right)}} + O\left(\frac{1}{c^2}\right). \end{cases}$$

Du développement de ν_0 , nous déduisons celui de ν^0 :

$$(III.15) \quad \nu^0 = \frac{\mu}{2\sqrt{G\rho}\sqrt{\varepsilon\left(1 - \frac{\mu^2}{4G\rho^2}\right)}} + O\left(\frac{1}{c^2}\right).$$

D'après les notations du paragraphe 7, alinéa c :

$$\begin{aligned} d\tau^2 &= -\frac{1}{\varepsilon^2} (\gamma_{00} dx^0 + \gamma_{0i} dx^i)^2 + ds^2, \\ \nu^\alpha &= \frac{dx^\alpha}{d\tau}, \quad \nu^\alpha \nu_\alpha = \varepsilon, \\ d\tau^2 &= \varepsilon d\sigma^2; \end{aligned}$$

d'où

$$\varepsilon = -\frac{1}{\xi^2} (\gamma_{00} \nu^0 + \gamma_{0i} \nu^i)^2 + \left(\frac{ds}{d\tau} \right)^2$$

et

$$\frac{ds}{d\tau} = \sqrt{\varepsilon + \frac{\nu_0^2}{\xi^2}} = \sqrt{\varepsilon + \frac{\mu^2}{\varepsilon(4G\rho^2 - \mu^2)}} + O\left(\frac{1}{c^2}\right).$$

De plus

$$\left(\frac{ds}{d\tau} \right)^2 = g_{ij} \frac{dx^i}{d\tau} \frac{dx^j}{d\tau} = c^2 \left[1 + O\left(\frac{1}{c^2}\right) \right],$$

ce qui entraîne

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{c} + O\left(\frac{1}{c^3}\right).$$

Ces derniers résultats permettent d'écrire les développements limités de ν^A et ν^i , en faisant l'hypothèse que $\frac{dx^A}{dt}$ est petit vis-à-vis de la vitesse de la lumière :

$$(III.16) \quad \begin{cases} \nu^A = \frac{dx^A}{d\tau} = \frac{dx^A}{dt} \frac{dt}{ds} \frac{ds}{d\tau} = \frac{1}{c} \frac{dx^A}{dt} \sqrt{\varepsilon + \frac{\mu^2}{\varepsilon(4G\rho^2 - \mu^2)}} + O\left(\frac{1}{c^3}\right), \\ \nu^i = \sqrt{\varepsilon + \frac{\mu^2}{\varepsilon(4G\rho^2 - \mu^2)}} + O\left(\frac{1}{c^2}\right). \end{cases}$$

Les expressions de $\Theta^{\alpha\beta}$, valables en première approximation, s'obtiennent alors immédiatement d'après (III.14), (III.15) et (III.16) :

$$(III.17) \quad \begin{cases} \Theta^{00} = 2\pi \frac{\mu^2}{\rho c^2} + O\left(\frac{1}{c^4}\right), \\ \Theta^{0A} = 4\pi \sqrt{G} \mu \frac{\dot{x}^A}{c} + O\left(\frac{1}{c^3}\right), \\ \Theta^{0i} = 4\pi \sqrt{G} \frac{\mu}{c^2} + O\left(\frac{1}{c^3}\right), \\ \Theta^{A4} = 8\pi G \rho \frac{\dot{x}^A}{c^3} + O\left(\frac{1}{c^5}\right), \\ \Theta^{AB} = O\left(\frac{1}{c^4}\right), \\ \Theta^{ik} = \frac{8\pi G \rho}{c^2} + O\left(\frac{1}{c^4}\right). \end{cases}$$

22. Équations du champ en première approximation, en coordonnées isothermes et dans le schéma fluide parfait. Développements

limités en première approximation de $\Gamma^{\alpha\beta}$, $\gamma^{\alpha\beta}$ et $\gamma_{\alpha\beta}$. — Comme nous l'avons indiqué au paragraphe 18, nous cherchons une solution globale des équations approchées de champ (cas extérieur et intérieur), sous les hypothèses faites aux paragraphes 17 et 18. D'après (III. 17) :

$$\Theta^{\alpha\beta} = O\left(\frac{1}{c^2}\right).$$

Les équations de champ du cas intérieur entraînent donc

$$\sqrt{\gamma} S_{(i)}^{\alpha\beta} = O\left(\frac{1}{c^2}\right).$$

Rappelons que

$$\begin{aligned} \gamma_{(0)}^{i,u} &= r_{i,u}, \\ d_{4i} &= \frac{\partial_{ii}}{c^2}. \end{aligned}$$

Δ désignant le laplacien ordinaire de E_3 rapporté à un repère orthonormé, les équations de champ du cas intérieur et du cas extérieur entraînent partout

$$\Delta \Gamma^{\alpha\beta} = O\left(\frac{1}{c^2}\right),$$

$$\Delta \gamma^{\alpha\beta} = O\left(\frac{1}{c^2}\right).$$

De plus, $\gamma^{\alpha\beta}$ tend vers $\eta_{\alpha\beta}$ dans le domaine à l'infini d'une section d'espace W_3 qui a été supposée complète; donc

$$\gamma^{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\beta} + O\left(\frac{1}{c^2}\right),$$

$$\Gamma^{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\beta} + O\left(\frac{1}{c^2}\right).$$

On aura nécessairement

$$(III. 18) \quad \sqrt{\gamma} S_{(i)}^{\alpha\beta} = -\frac{\Delta \Gamma^{\alpha\beta}}{2} + O\left(\frac{1}{c^4}\right).$$

Les équations de champ du cas intérieur sont alors

$$(III.19) \quad \left\{ \begin{array}{l} -\Delta \Gamma^{44} = \frac{16\pi G \rho}{c^2} + O\left(\frac{1}{c^4}\right), \\ -\Delta \Gamma^{4A} = \frac{16\pi G \rho \dot{x}^A}{c^3} + O\left(\frac{1}{c^5}\right), \\ \Delta \Gamma^{AB} = O\left(\frac{1}{c^4}\right), \\ -\Delta \Gamma^{00} = \frac{4\pi \mu^2}{\rho c^2} + O\left(\frac{1}{c^4}\right), \\ -\Delta \Gamma^{04} = \frac{8\pi \sqrt{G} \mu}{c^2} + O\left(\frac{1}{c^4}\right), \\ -\Delta \Gamma^{0A} = \frac{8\pi \sqrt{G} \mu \dot{x}^A}{c^3} + O\left(\frac{1}{c^5}\right). \end{array} \right.$$

Les équations de champ du cas extérieur peuvent s'écrire

$$(III.20) \quad \Delta \Gamma^{\alpha\beta} = O\left(\frac{1}{c^4}\right).$$

D'après la remarque déjà faite sur l'équation de Laplace, nous pouvons alors déduire en première approximation l'ordre de $\Gamma^{\alpha\beta}$ pour $\alpha \neq \beta$ (pour $\alpha = \beta$ cet ordre est connu, la métrique étant supposée quasi euclidienne).

D'après (III.19) et (III.20), nous pouvons déterminer $\Gamma^{\alpha\beta}$ en première approximation. Pour cela, précisons certaines notations.

U est le potentiel newtonien créé par l'ensemble des N domaines intérieurs au point considéré. Il satisfait :

$$a. \quad \Delta U = -4\pi G \rho$$

à l'intérieur des N domaines;

$$b. \quad \Delta U = 0$$

à l'extérieur des N domaines.

Désignons de même par V , W , P^A , Q^A , les potentiels satisfaisant respectivement l'équation de Laplace à l'extérieur des N domaines, et à l'intérieur les équations

$$(III.21) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta V = -4\pi \mu \sqrt{G}, \\ \Delta W = -\frac{4\pi \mu^2}{\rho}, \\ \Delta P^A = -4\pi \mu \dot{x}^A \sqrt{G}, \\ \Delta Q^A = -4\pi G \rho \dot{x}^A. \end{array} \right.$$

Nous désignons aussi par $U_s, V_s, W_s, P_s^A, Q_s^A$ les potentiels créés respectivement par le s^{idme} domaine au point considéré.

Les développements limités des $\Gamma^{\alpha\beta}$ en première approximation sont alors

$$(III.22) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Gamma^{44} = 1 + \frac{4U}{c^2} + O\left(\frac{1}{c^4}\right), \\ \Gamma^{4A} = \frac{4Q^A}{c^3} + O\left(\frac{1}{c^5}\right), \\ \Gamma^{AB} = -\delta_A^B + O\left(\frac{1}{c^4}\right), \\ \Gamma^{00} = -1 + \frac{W}{c^2} + O\left(\frac{1}{c^4}\right), \\ \Gamma^{04} = \frac{2V}{c^2} + O\left(\frac{1}{c^4}\right), \\ \Gamma^{0A} = \frac{2P^A}{c^3} + O\left(\frac{1}{c^5}\right). \end{array} \right.$$

Désignons par Γ le déterminant des $\Gamma^{\alpha\beta}$. γ s'exprime en fonction de Γ :

$$\Gamma = \gamma^{\frac{3}{2}},$$

d'où

$$\sqrt{\gamma} = \Gamma^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{4U - W}{3c^2} + O\left(\frac{1}{c^4}\right).$$

Les développements limités en première approximation de $\gamma^{\alpha\beta}$ sont donc

$$(III.23) \quad \left\{ \begin{array}{l} \gamma^{44} = 1 + \frac{W + 8U}{3c^2} + O\left(\frac{1}{c^4}\right), \\ \gamma^{4A} = \frac{4Q^A}{c^3} + O\left(\frac{1}{c^5}\right), \\ \gamma^{AB} = -\delta_A^B + \frac{\delta_A^B(4U - W)}{3c^2} + O\left(\frac{1}{c^4}\right), \\ \gamma^{00} = -1 + \frac{2W + 4U}{3c^2} + O\left(\frac{1}{c^4}\right), \\ \gamma^{04} = \frac{2V}{c^2} + O\left(\frac{1}{c^4}\right), \\ \gamma^{0A} = \frac{2P^A}{c^3} + O\left(\frac{1}{c^5}\right). \end{array} \right.$$

Et d'après (III. 13), les développements limités de $\gamma_{\alpha\beta}$ s'obtiennent immédiatement ⁽¹⁾ :

$$(III. 24) \quad \left\{ \begin{array}{l} \gamma_{44} = 1 - \frac{W + 8U}{3c^2} + O\left(\frac{1}{c^4}\right), \\ \gamma_{4A} = \frac{4Q^A}{c^3} + O\left(\frac{1}{c^5}\right), \\ \gamma_{AB} = -\delta_{AB}^R + \frac{\partial_A^R (W - 4U)}{3c^2} + O\left(\frac{1}{c^4}\right), \\ \gamma_{00} = -1 - \frac{2W + 4U}{3c^2} + O\left(\frac{1}{c^4}\right), \\ \gamma_{04} = \frac{2V}{c^2} + O\left(\frac{1}{c^4}\right), \\ \gamma_{0A} = -\frac{2P^A}{c^3} + O\left(\frac{1}{c^5}\right). \end{array} \right.$$

Dans la suite, nous supposons que les N domaines intérieurs S_s ($s = 1, 2, \dots, N$) sont sphériques de centre G_s , de masse m_s et de charge e_s . En particulier, les sphères S_s pourront avoir un rayon arbitrairement petit, c'est-à-dire être interprétées comme des particules ponctuelles de masse m_s et de charge e_s .

En un point quelconque extérieur aux N domaines sphériques S_s , et en supposant W_3 homéomorphe à E_3 , les expressions de U_s , V_s et W_s sont alors

$$(III. 25) \quad \left\{ \begin{array}{l} U_s = \frac{G m_s}{r_s}, \quad V_s = \frac{\sqrt{G} e_s}{r_s}, \\ W_s = \frac{e_s^2}{m_s r_s}; \quad Q_s^A = \frac{G m_s \dot{x}_s^A}{r_s}; \quad P_s^A = \frac{\sqrt{G} e_s \dot{x}_s^A}{r_s}, \end{array} \right.$$

où

$$r_s = \sqrt{(x^1 - \xi_s^1)^2 + (x^2 - \xi_s^2)^2 + (x^3 - \xi_s^3)^2},$$

x^1, x^2, x^3 étant les coordonnées d'un point variable de W_3 et $\xi_s^1, \xi_s^2, \xi_s^3$ celles de G_s ,

$$\dot{x}_s^A = \frac{dx_s^A}{dt}.$$

Avec les notations choisies :

$$U = \sum_s U_s, \quad V = \sum_s V_s, \quad W = \sum_s W_s, \quad P^A = \sum_s P_s^A, \quad Q^A = \sum_s Q_s^A,$$

⁽¹⁾ Les ordres en première approximation de γ_{0A} et γ_{04} sont différents de ceux donnés par F. Hennequin [27].

Donc à l'extérieur des N domaines S_s et en première approximation, le champ est le même que celui produit par N particules ponctuelles de masse m_s et de charge e_s . De plus le champ extérieur, prolongé à l'intérieur des N domaines, possède N singularités ponctuelles, à symétrie sphérique.

23. Détermination en première approximation des développements limités de $\Gamma^{\alpha\beta}$ satisfaisant les équations de champ du cas extérieur et les conditions d'isothermie. — Conformément au paragraphe 19, nous allons déterminer en première approximation le champ extérieur satisfaisant les conditions d'isothermie et possédant N singularités ponctuelles, à symétrie sphérique.

Le champ étant quasi galiléen, les développements limités de Γ^{00} et Γ^{44} sont de la forme

$$(III.26) \quad \begin{cases} \Gamma^{00} = -1 + O\left(\frac{1}{c^2}\right), \\ \Gamma^{44} = 1 + O\left(\frac{1}{c^2}\right). \end{cases}$$

Les équations de champ du cas extérieur permettent d'écrire

$$(III.27) \quad \Delta \Gamma^{\alpha\beta} = O\left(\frac{1}{c^2}\right).$$

Les conditions d'isothermie

$$\partial_B \Gamma^{B\alpha} + \partial_4 \Gamma^{4\alpha} = 0,$$

Compte tenu de

$$\partial_4 \Gamma^{4\alpha} = O\left(\frac{1}{c^2}\right),$$

entraînent

$$(III.28) \quad \partial_B \Gamma^{B\alpha} = O\left(\frac{1}{c^2}\right).$$

Montrons que d'après (III.27) et (III.28), nous pouvons écrire

$$\Gamma^{A\alpha} = \eta_{A\alpha} + O\left(\frac{1}{c^2}\right).$$

Supposons que

$$\Gamma^{A\alpha} = \eta_{A\alpha} + \frac{W^{A\alpha}}{c} + O\left(\frac{1}{c^2}\right)$$

et établissons que $W^{\Lambda z}$ est nécessairement nul. De (III.27) et de l'hypothèse de symétrie sphérique des singularités, il résulte que nécessairement $W^{\Lambda z}$ est de la forme

$$W^{\Lambda z} = \sum_s \frac{M_s^{\Lambda}}{r_s},$$

où M_s^{Λ} peut dépendre éventuellement du temps.

(III.28) s'écrit en première approximation

$$(III.29) \quad \sum_{B,s} \frac{M_s^B (x^B - \xi_s^B)}{r_s^3} = 0.$$

Cette relation vraie en tout point distinct des singularités ($x^B \neq \xi_s^B$), est vraie en coordonnées polaires ayant pour pôle la $k^{\text{ième}}$ singularité G_k , quels que soient r, θ, φ . (III.29) peut alors s'écrire

$$(III.30) \quad -\frac{1}{r^2} (M_k^1 \sin \theta \cos \varphi + M_k^2 \sin \theta \sin \varphi + M_k^3 \cos \theta) \\ - \sum_{B, q \neq k} \frac{M_q^B (x^B - \xi_q^B)}{r_q^3} = 0.$$

Dans le dernier terme, x^1, x^2, x^3 sont exprimés implicitement en coordonnées polaires par

$$\begin{aligned} x^1 &= \xi_k^1 + r \sin \theta \cos \varphi, \\ x^2 &= \xi_k^2 + r \sin \theta \sin \varphi, \\ x^3 &= \xi_k^3 + r \cos \theta. \end{aligned}$$

Si nous faisons tendre r vers zéro, θ et φ étant supposés fixés :

$$\sum_{B, q \neq k} \frac{M_q^B (x^B - \xi_q^B)}{r_q^3} \quad \text{tend vers} \quad \sum_{B, q} \frac{M_q^B (\xi_k^B - \xi_q^B)}{(r_{qk})^3},$$

expression qui reste finie (r_{qk} désignant la distance euclidienne de G_q et G_k).

Donc (III.30) entraîne

$$(III.31) \quad M_k^1 \sin \theta \cos \varphi + M_k^2 \sin \theta \sin \varphi + M_k^3 \cos \theta = 0.$$

Or (III.30) est valable quels que soient θ et φ , (III.31) est donc vraie quels que soient θ et φ , d'où

$$M_k^{\Lambda} = 0.$$

Le raisonnement fait en particularisant la $k^{\text{ième}}$ singularité peut évidemment se faire pour une singularité quelconque. Donc

$$(III.32) \quad \Gamma^{\Lambda\alpha} = \gamma_{\Lambda\alpha} + O\left(\frac{1}{c^2}\right).$$

Nous avons vu au paragraphe 22, que les équations de champ du cas intérieur entraînent

$$(III.33) \quad \begin{cases} \Gamma^{0i} = O\left(\frac{1}{c^2}\right), \\ \Gamma^{0B} = O\left(\frac{1}{c^3}\right). \end{cases}$$

Nous vérifions facilement que les équations de champ du cas extérieur associées aux conditions d'isothermie ne peuvent entraîner les conditions (III.33). Il est donc nécessaire de faire une hypothèse supplémentaire soit

$$\gamma_{0i} = O\left(\frac{1}{c^2}\right),$$

soit

$$\gamma_{0B} = O\left(\frac{1}{c^2}\right),$$

l'une des deux conditions entraînant l'autre.

Supposons par exemple

$$\gamma_{0i} = O\left(\frac{1}{c^2}\right),$$

cette condition est équivalente à

$$\gamma^{0i} = O\left(\frac{1}{c^2}\right) \quad \text{ou} \quad \Gamma^{0i} = O\left(\frac{1}{c^2}\right).$$

Les équations de champ du cas extérieur et les conditions d'isothermie peuvent alors s'écrire avec cette autre hypothèse :

$$(III.34) \quad \Delta \Gamma^{\alpha\beta} + O\left(\frac{1}{c^4}\right) = 0,$$

$$(III.35) \quad \partial_B \Gamma^{B\alpha} = O\left(\frac{1}{c^3}\right).$$

D'après une démonstration déjà faite dans ce paragraphe, il vient

$$(III.36) \quad \Gamma^{B\alpha} = O\left(\frac{1}{c^3}\right).$$

Nous pouvons écrire

$$\Gamma^{44} = 1 + \frac{W^{44}}{c^2} + O\left(\frac{1}{c^4}\right),$$

$$\Gamma^{4A} = \frac{W^{4A}}{c^3} + O\left(\frac{1}{c^5}\right)$$

et (III.34) entraîne

$$\Delta W^{44} = 0,$$

$$\Delta W^{4A} = 0.$$

Nous pouvons donc poser

$$(III.37) \quad \begin{cases} W^{44} = 4 \sum_s \frac{G m_s}{r_s}, \\ W^{4A} = \sum_s \frac{\beta_s^A}{r_s}, \end{cases}$$

où m_s et β_s^A peuvent dépendre du temps.

Établissons d'après les conditions d'isothermie que m_s est indépendant du temps et que

$$\dot{\beta}_s^A = 4 G m_s \dot{\xi}_s^A.$$

La condition d'isothermie

$$\partial_B \Gamma^{B4} + \partial_4 \Gamma^{44} = 0$$

entraîne d'après (III.34) :

$$\sum_s (\beta_s^B - 4 G m_s \dot{\xi}_s^B) \partial_B \frac{1}{r_s} + 4 \sum_s \frac{G \dot{m}_s}{r_s} = 0.$$

c'est-à-dire en coordonnées polaires (r, θ, φ) ayant pour pôle la $k^{\text{ième}}$ singularité G_k :

$$(III.38) \quad \begin{aligned} & - \sum_B (\beta_k^B - 4 G m_k \dot{\xi}_k^B) \frac{x^B - \xi_k^B}{r^3} + \frac{4 G \dot{m}_k}{r} \\ & - \sum_{q \neq k, B} (\beta_q^B - 4 G m_q \dot{\xi}_q^B) \frac{x^B - \xi_q^B}{r_q^3} + \frac{4 G \dot{m}_q}{r_q} = 0. \end{aligned}$$

(III.38) est valable quels que soient r, θ, φ . Quand r tend vers zéro, le troisième et le quatrième terme tend vers des quantités finies. Le premier terme étant un infiniment grand équivalent à $\frac{1}{r^2}$ et

le deuxième équivalent à $\frac{1}{r}$, nous avons

$$\begin{aligned} & (\beta_k^1 - 4 G m_k \dot{\xi}_k^1) \sin \theta \cos \varphi \\ & + (\beta_k^2 - 4 G m_k \dot{\xi}_k^2) \sin \theta \sin \varphi + (\beta_k^3 - 4 G m_k \dot{\xi}_k^3) \cos \theta = 0, \\ & \dot{m}_k = 0. \end{aligned}$$

La première relation étant vraie quels que soient θ et φ :

$$\begin{aligned} \beta_k^B - 4 G m_k \dot{\xi}_k^B &= 0, \\ \dot{m}_k &= 0. \end{aligned}$$

Ce raisonnement peut être fait au voisinage de chaque singularité du champ extérieur. Comme nous le verrons plus tard, il aurait pu être démontré que m_s est indépendant du temps à partir des équations de mouvement. Nous avons donc établi

$$\begin{aligned} \Gamma^{44} &= 1 + \frac{4}{c^2} \sum_s \frac{G m_s}{r_s} + O\left(\frac{1}{c^4}\right), \\ \Gamma^{4A} &= \frac{4}{c^3} \sum_s \frac{G m_s \dot{\xi}_s^A}{r_s} + O\left(\frac{1}{c^5}\right). \end{aligned}$$

D'après les équations de champ du cas extérieur et les conditions d'isothermie, nous avons

$$\begin{aligned} \Delta \Gamma^{AB} &= O\left(\frac{1}{c^4}\right), \\ \partial_B \Gamma^{BA} &= O\left(\frac{1}{c^4}\right); \end{aligned}$$

d'où, d'après une démonstration déjà faite plus haut, nous pouvons conclure :

$$\Gamma^{AB} = -\delta_A^B + O\left(\frac{1}{c^4}\right).$$

De plus, Γ^{04} satisfaisant à

$$\Delta \Gamma^{04} = O\left(\frac{1}{c^4}\right),$$

nous pouvons écrire

$$\Gamma^{04} = \frac{2\sqrt{G}}{c^2} \sum_s \frac{e_s}{r_s} + O\left(\frac{1}{c^4}\right),$$

où e_s peut éventuellement dépendre du temps. D'après (III.36), le développement de Γ^{A0} est de la même forme

$$\Gamma^{A0} = \frac{W^{A0}}{c^3} + O\left(\frac{1}{c^5}\right).$$

Or, d'après les équations de champ du cas extérieur et les conditions d'isothermie

$$\partial_B W^{B0} + 2\sqrt{G} \partial_t \left(\sum_s \frac{e_s}{r_s} \right) = 0,$$

$$\Delta W^{A0} = 0.$$

Par une démonstration analogue à une déjà faite dans ce paragraphe, il vient donc

$$W^{A0} = 2\sqrt{G} \sum_s \frac{e_s}{r_s} \dot{\xi}_s^A,$$

$$\dot{e}_s = 0.$$

Nous montrerons que l'indépendance des e , par rapport au temps pouvait se démontrer par les équations de mouvement. D'après les équations de champ du cas extérieur

$$\Delta \Gamma^{00} + O\left(\frac{1}{c^4}\right) = 0,$$

nous pouvons poser

$$\Gamma^{00} = -1 + \frac{1}{c^2} \sum_s \frac{\beta_s}{r_s} + O\left(\frac{1}{c^4}\right).$$

Mais, rien ne peut prouver que $\beta_s = \frac{e_s^2}{m_s}$, ce qui résulte des équations de champ du cas intérieur.

Donc, moyennant l'hypothèse supplémentaire

$$\gamma_{0k} = O\left(\frac{1}{c^2}\right)$$

(cette hypothèse n'a pas été utilisée au paragraphe 22), nous trouvons les mêmes solutions [*cf.* (III.22) et (III.25)] pour les densités tensorielles, en première approximation. Toutefois, ce sont les équations de champ du cas intérieur qui entraînent les interprétations suivantes, nécessaires pour que le champ extérieur soit effectivement produit par N domaines sphériques : m_s et e_s représentent

effectivement la masse et la charge du $s^{\text{ième}}$ domaine.

$$j_s = \frac{e_s^2}{m_s}.$$

Comme dans le paragraphe 22, des développements limités des densités tensorielles, nous déduisons ceux de $\gamma^{\alpha\beta}$ et $\gamma_{\alpha\beta}$. Dans l'hypothèse de singularités ponctuelles à symétrie sphérique, le champ extérieur satisfaisant les conditions d'isothermie, est donc déterminé en première approximation, à l'interprétation physique près de certaines constantes.

CHAPITRE IV.

ÉTUDE DES ÉQUATIONS DE MOUVEMENT EN THÉORIE DE JORDAN-THIRY.

DÉTERMINATION EFFECTIVE EN PREMIÈRE APPROXIMATION.

Dans ce chapitre, nous nous proposons d'étudier en première approximation et en théorie pentadimensionnelle de Jordan-Thiry, les équations de mouvement obtenues à partir des équations de champ du cas extérieur : cette méthode généralise la méthode des singularités de la relativité générale, méthode établie en 1938 par Einstein, Infeld, Hoffmann [12], puis approfondie en 1957 par Pham Tan Hoang [23]; elle a permis d'établir les équations de mouvement de N particules matérielles neutres. Nous appliquerons cette méthode, dans le cas particulier où le champ extérieur possède N singularités ponctuelles à symétrie sphérique. Comme nous l'avons montré dans le paragraphe précédent, nous pouvons supposer en première approximation, que le champ extérieur est produit par N domaines à symétrie sphérique. Les équations déduites des équations de champ du cas extérieur seront interprétées comme les équations de mouvement de N domaines à symétrie sphérique. Les mêmes résultats sont obtenus par la méthode du tenseur impulsion-énergie, en utilisant les équations de champ du cas intérieur : cette méthode a été employée par F. Hennequin [27], mais nous obtenons des résultats différents provenant de divergences déjà signalées dans les solutions des équations de champ.

24. Exposé de la méthode des singularités dans une théorie généralisant celle de Jordan-Thiry. — Avant d'atteindre le but proposé

au début du chapitre, nous allons essayer de donner une méthode générale d'obtention des équations de mouvement, en utilisant uniquement les équations de champ du cas extérieur, dans le cadre d'une variété V_{n+1} , à $(n+1)$ dimensions, admettant un groupe connexe d'isométries à un paramètre; ce groupe d'isométries satisfait les mêmes propriétés que celui de la variété V_3 de la théorie de Jordan-Thiry (cf. § 1). Le problème correspondra alors au cas particulier où $n=4$, et où le champ extérieur présente N singularités ponctuelles à symétrie sphérique. Précisons alors les hypothèses satisfaites par V_{n+1} :

A. HYPOTHÈSES. — V_{n+1} est une variété différentiable à $(n+1)$ dimensions de classe de différentiabilité, C^2 , C^4 par morceaux.

V_{n+1} , admettant un groupe connexe d'isométries, il existe un système de coordonnées privilégié qui est dit adapté à l'isométrie $\frac{\partial}{\partial \xi^0}$ tel que $\xi^0 = 1$, $\xi^i = 0$.

On posera

$$\begin{aligned} \alpha &= 0, 1, 2, \dots, n, \\ i &= 1, 2, \dots, n, \\ A &= 1, 2, \dots, n-1, \\ x^n &= ct. \end{aligned}$$

Soit W_n une section particulière de V_{n+1} par $x^0 = \text{Cte}$.

Désignons par V_n l'espace quotient de V_{n+1} par le groupe d'isométries. Toutes les sections W_n sont homéomorphes à V_n .

Soit W_{n-1} une section de V_n par $x^n = \text{Cte}$. Une telle section sera appelée section d'espace. Supposons que la métrique $d\sigma^2 = \gamma_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$, satisfasse les propriétés suivantes, à l'extérieur de N domaines de V_{n+1} , appelés domaines de singularités.

α . Elle est partout définie et hyperbolique normale, avec un carré positif et n carrés négatifs.

Les trajectoires du groupe d'isométries sont telles que $d\sigma^2$ soit négatif, c'est-à-dire $\gamma_{00} < 0$. On pose alors

$$\begin{aligned} \xi^2 &= -\gamma_{00} > 0, \\ ct^2 &= (\omega'')^2 + (\omega''')^2 + \dots + (\omega''^{n-1})^2. \end{aligned}$$

Les ω^{α} sont des formes locales de Pfaff :

$$\omega^0 = -\frac{1}{\xi} (\gamma_{00} dx^0 + \gamma_{0i} dx^i).$$

b. Elle est régulière, c'est-à-dire C^4 , C^3 par morceaux.

c. Elle satisfait les équations de champ du cas extérieur,

$$S^{\alpha\beta} = 0.$$

V_n sera alors munie de la métrique riemannienne de type hyperbolique normal [1 carré positif et $(n-1)$ carrés négatifs] :

$$ds^2 = \xi g_{ij} dx^i dx^j$$

avec

$$g_{ij} = \gamma_{ij} - \frac{\gamma_{i0} \gamma_{j0}}{\gamma_{00}},$$

x^n désigne la variable qui présente le caractère temporel, γ_{nn} et γ^{nn} sont des quantités positives.

Nous munirons une section d'espace particulière W_{n-1} de la métrique $d\bar{s}^2 = \xi g_{AB} dx^A dx^B$. Un domaine de singularité de V_{n+1} se trouve représenté dans W_{n-1} par un domaine que nous appellerons domaine de singularité de W_{n-1} (conformément aux hypothèses du paragraphe 19, dans les applications nous nous placerons dans le cas limite où les singularités sont ponctuelles à symétrie sphérique). De plus, puisque $g^{nn} = \gamma^{nn} > 0$, la forme quadratique $d\bar{s}^2$ est définie négative à l'extérieur des singularités de W_{n-1} .

Nous supposons que W_{n-1} est une variété orientée. Soit γ un domaine de singularités particulier de V_{n+1} , et Γ , sa représentation dans W_{n-1} . Γ est muni, par induction de la structure de W_{n-1} , d'une structure de variété orientée : c'est une sous-variété de W_{n-1} .

Nous faisons les hypothèses suivantes sur la métrique $d\sigma^2$ et sur un domaine de singularités quelconque Γ de W_{n-1} :

α . La métrique est quasi euclidienne, à comportement asymptotique euclidien (*cf.* § 17).

β . On peut définir pour chaque domaine de singularités une vitesse moyenne de translation, cette vitesse étant petite devant c .

On a alors $\partial_n = O\left(\frac{1}{c}\right)$. C'est l'hypothèse quasi statique.

γ . Γ admet un bord $\partial\Gamma$ qui est une variété bornée à $(n-2)$ dimensions.

La propriété γ implique que $\partial\Gamma$ peut être douée d'une structure d'espace métrique. Montrons-le. Désignons par $(t^1, \dots, t^{n-2})$ le système de coordonnées locales auquel se trouve rapporté $\partial\Gamma$.

$d\bar{s}^2$ induit sur $\partial\Gamma$ une métrique rapportée au système de coordonnées locales $(t^1, \dots, t^{n-2})$. La distance de deux points A_1 et A_2 de $\partial\Gamma$ est alors la borne inférieure des longueurs des chemins continûment différentiables joignant A_1 et A_2 .

Nous utiliserons les notations suivantes :

$\bar{g}$, déterminant de la forme quadratique $d\bar{s}^2$ définie sur W_{n-1} .

g' , déterminant de la forme quadratique fondamentale $d\bar{s}^2$ définie sur $\partial\Gamma$ et rapportée aux variables $(t^1, \dots, t^{n-2})$.

Considérons maintenant un domaine C de W_{n-1} assujetti seulement aux conditions suivantes :

A_1 . C contient un seul domaine de singularité de W_{n-1} , par exemple Γ .

A_2 . C admet un bord ∂C qui est une variété bornée à $(n-2)$ dimensions.

A_3 . $C - \Gamma$ est borné.

Désignons par $S^{\alpha\beta}$ le tenseur d'Einstein, $\eta_{A_1 \dots A_{n-1}}$ le tenseur complètement antisymétrique attaché à la forme élément de volume de W_{n-1} :

$$\eta_{A_1 \dots A_{n-1}} = (-1)^{I(A_1 \dots A_{n-1})} \sqrt{\bar{g}}.$$

Le tenseur $S^{(\alpha)\lambda}$ induit sur W_{n-1} un vecteur $\tilde{S}^{(\alpha)}$, l'indice α ayant une valeur fixée quelconque. Considérons Ω^α , forme différentielle extérieure d'ordre $(n-2)$:

$$\Omega^\alpha = \frac{\tau_{A_1 \dots A_{n-1}}}{(n-2)!} S^{(\alpha) A_{n-1}} dx^{A_1} \wedge \dots \wedge dx^{A_{n-1}}.$$

B. ÉTUDE DES PROPRIÉTÉS ⁽¹⁾ DU FLUX DE $\tilde{S}^{(\alpha)}$ A TRAVERS ∂C . — Les hypothèses et les notations ayant été précisées dans A, nous nous

(1) Le principe des démonstrations est celui des démonstrations faites par Einstein, Infeld, Hoffmann [12] dans le cadre de la variété V_4 de la relativité générale, et par Pham Tan Hoang [23] dans le cadre d'une variété V_n généralisant celui de la relativité générale.

proposons d'étudier les propriétés de σ^α , flux de $\vec{S}^{(\alpha)}$ à travers ∂C ,

$$\sigma^\alpha = \int_{\partial C} \Omega^{(\alpha)}.$$

Donnons une autre expression pour σ^α . ∂C est une variété bornée à $(n-2)$ dimensions recouverte par des voisinages rapportés à des coordonnées locales, $t^1, \dots, t^{n-2}$:

$$\sigma^\alpha = \int_{\partial C} \frac{\eta_{A_1 \dots A_{n-1}}}{(n-2)!} S^{(\alpha) A_{n-1}} \frac{D(x^{A_1}, \dots, x^{A_{n-1}})}{D(t^1, \dots, t^{n-2})} dt^1 \wedge \dots \wedge dt^{n-2}.$$

Posons

$$v_B = \frac{1}{(n-2)!} \frac{\eta_{A_1 \dots A_{n-2} B}}{\sqrt{|g'|}} \frac{D(x^{A_1}, \dots, x^{A_{n-2}})}{D(t^1, \dots, t^{n-2})},$$

v_B sont les composantes covariantes d'un vecteur $\vec{v}$ unitaire normal à ∂C et extérieur à C . ∂C aura l'orientation déduite de celle de C à l'aide du vecteur $\vec{v}$,

$$\begin{aligned} \text{(IV.1)} \quad \sigma^\alpha &= \int_{\partial C} S^{(\alpha) B} \sqrt{|g'|} v_B dt^1 \wedge \dots \wedge dt^{n-2} \\ &= \int_{\partial C} \vec{S}^{(\alpha)} \vec{v} \sqrt{|g'|} dt^1 \wedge \dots \wedge dt^{n-2} \end{aligned}$$

La métrique $d\bar{s}^2$ étant régulière à l'extérieur des singularités de W_{n-1} , $\Omega^{(\alpha)}$ est localement intégrable sur ∂C . Donc d'après la condition A_2 , σ^α existe. De même, d désignant le symbole de différentiation extérieure, $d\Omega^{(\alpha)}$ est localement intégrable dans $C - \Gamma$. Aussi, d'après la condition A_3 , $\int_{C-\Gamma} d\Omega^{(\alpha)}$ existe.

Orientons ∂C et $\partial(C - \Gamma)$, à partir de C et de $C - \Gamma$, comme nous avons orienté $\partial \Gamma$ à partir de Γ . Nous avons alors

$$\text{(IV.2)} \quad \int_{\partial(C-\Gamma)} \Omega^{(\alpha)} \equiv \int_{\partial C} \Omega^{(\alpha)} - \int_{\partial \Gamma} \Omega^{(\alpha)}$$

et d'après le théorème de Stokes :

$$\text{(IV.3)} \quad \int_{\partial(C-\Gamma)} \Omega^{(\alpha)} = \int_{C-\Gamma} d\Omega^{(\alpha)}.$$

Désignons par D_x et ∇_A , les opérateurs de dérivation covariante relativement aux connexions de V_{n+1} et W_{n-1} . Rappelons les expressions de $\Omega^{(\alpha)}$ et $d\Omega^{(\alpha)}$:

$$\Omega^{(\alpha)} = \frac{1}{(n-2)!} \eta_{A_1 \dots A_{n-1}} S^{(\alpha) A_{n-1}} dx^{A_1} \wedge \dots \wedge dx^{A_{n-1}},$$

$$d\Omega^{(\alpha)} = \frac{(-1)^{n-2}}{(n-2)!} d_{A_{n-1}} (\eta_{A_1 \dots A_{n-1}} S^{(\alpha) A_{n-1}}) dx^{A_1} \wedge \dots \wedge dx^{A_{n-2}} \wedge dx^{A_{n-1}},$$

$d\Omega^{(\alpha)}$ peut encore s'écrire

$$(IV.4) \quad d\Omega^{(\alpha)} = (-1)^{n-2} (n-1) d_A (\sqrt{|\bar{g}|} S^{\alpha A}) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{n-1}$$

or, par définition

$$\operatorname{div} \vec{S}^{(\alpha)} \equiv \frac{1}{\sqrt{|\bar{g}|}} d_A (S^{(\alpha) A} \sqrt{|\bar{g}|}) \equiv \bar{\nabla}_A S^{(\alpha) A}.$$

De (IV.2), (IV.3) et (IV.4) résulte :

PREMIÈRE PROPRIÉTÉ. — *Une condition nécessaire et suffisante pour que σ^α soit indépendant de C , supposé satisfaire les conditions énoncées, est que $\operatorname{div} \vec{S}^{(\alpha)}$ soit nulle à l'extérieur des singularités de W_{n-1} .*

Supposons alors qu'il existe des développements limités des $\gamma_{\alpha\beta}$ en fonction de $\frac{1}{c}$, jusqu'à l'ordre p ,

$$\gamma_{\alpha\beta} = \sum_{l=0}^p \frac{\gamma_{\alpha\beta}^{(l)}}{c^l} + O\left(\frac{1}{c^{p+1}}\right),$$

$S^{\alpha\beta}$ et σ^α admettent les développements

$$S^{\alpha\beta} = \sum_{l=0}^p \frac{S_{(l)}^{\alpha\beta}}{c^l} + O\left(\frac{1}{c^{p+1}}\right),$$

$$\sigma^\alpha = \sum_{l=0}^p \frac{\sigma_l^\alpha}{c^l} + O\left(\frac{1}{c^{p+1}}\right).$$

Posons

$$E^{(\alpha)} = \bar{\nabla}_A S^{(\alpha) A} \equiv \operatorname{div} \vec{S}^{(\alpha)},$$

$E^{(\alpha)}$ admettant le développement

$$E^{(\alpha)} = \sum_{l=0}^p \frac{E_{(l)}^{\alpha}}{c^l} + O\left(\frac{1}{c^{p+1}}\right),$$

$\sigma_{(p)}^{\alpha}$ satisfait alors à la même propriété que σ^{α} ,

DEUXIÈME PROPRIÉTÉ. — *Une condition nécessaire et suffisante pour que $\sigma_{(p)}^{\alpha}$ soit indépendante de C supposé satisfaire les conditions énoncées plus haut, est que $E_{(p)}^{(\alpha)}$ soit nul à l'extérieur des singularités de W_{n-1} .*

Supposons maintenant que les équations de champ du cas extérieur soient vérifiées jusqu'à l'ordre $(p-1)$ compris, et montrons que les identités de conservation entraînent $E_{(p)}^{(\alpha)} = 0$.

Désignons par $\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}$ les coefficients de la connexion de V_{n+1} et par $\bar{\Gamma}_{BC}^A$ ceux de W_{n-1} . Écrivons l'expression de $D_{\beta} S^{\alpha\beta}$:

$$\begin{aligned} D_{\beta} S^{\alpha\beta} &= d_{\beta} S^{\alpha\beta} + \Gamma_{\beta\sigma}^{\beta} S^{\alpha\sigma} + \Gamma_{\beta\sigma}^{\alpha} S^{\sigma\beta} \\ &= d_A S^{\alpha A} + d_0 S^{\alpha 0} + d_n S^{\alpha n} + \Gamma_{\beta\sigma}^{\beta} S^{\alpha\sigma} + \Gamma_{\beta\sigma}^{\alpha} S^{\sigma\beta} \\ &= \bar{\nabla}_A S^{(\alpha)A} + d_n S^{\alpha n} - \bar{\Gamma}_{AB}^A S^{(\alpha)B} + \Gamma_{\beta\sigma}^{\beta} S^{\alpha\sigma} + \Gamma_{\beta\sigma}^{\alpha} S^{\sigma\beta}, \end{aligned}$$

or nous avons

$$d_n = \frac{\partial_t}{c}; \quad \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} = O\left(\frac{1}{c^2}\right); \quad \bar{\Gamma}_{AB}^A = O\left(\frac{1}{c^2}\right).$$

Du caractère conservatif de $S^{\alpha\beta}$ résulte l'identité

$$E^{(\alpha)} + d_n S^{\alpha n} - \bar{\Gamma}_{AB}^A S^{\alpha B} + \Gamma_{\beta\sigma}^{\beta} S^{\alpha\sigma} + \Gamma_{\beta\sigma}^{\alpha} S^{\sigma\beta} = 0.$$

Cette identité entraîne que $E_{(p)}^{(\alpha)}$ dépend seulement de $S_{(l)}^{\alpha\beta}$ pour $l \leq p-1$ et pas de $S_{(p)}^{\alpha\beta}$,

Donc si nous supposons

$$S_{(l)}^{\alpha\beta} = 0 \quad \text{pour } l \leq p-1,$$

il vient

$$E_{(p)}^{(\alpha)} = 0,$$

d'où, il découle encore que $\sigma_{(p)}^{\alpha}$ est indépendant de C. Nous pouvons donc énoncer :

TROISIÈME PROPRIÉTÉ. — *Si les équations de champ du cas extérieur sont vérifiées jusqu'à l'ordre $(p-1)$ compris, nous pouvons*

conclure que σ_p^z est indépendant de C satisfaisant les conditions énoncées plus haut.

Démontrons maintenant que σ_p^z ne dépend que des potentiels d'ordre au plus égal à $(p-1)$. Pour cela, mettons en évidence dans $S^{z\mathbf{M}}$ les termes linéaires qui ne comportent pas de dérivation par rapport à x^n . Rappelons l'expression de $S^{z\mathbf{M}}$ dans un système de coordonnées quelconques :

$$\begin{aligned} \text{(IV.5)} \quad S^{z\mathbf{M}} = & \frac{\mathbf{I}}{2\sqrt{|\gamma|}} \square \Gamma^{\alpha\mathbf{M}} - \frac{\gamma^{\lambda\mu}}{\sqrt{\gamma}} \Gamma_{\lambda} \partial_{\mu} \Gamma^{\alpha\mathbf{M}} - \Gamma_{\gamma}^z \Gamma_{\mu}^{\mathbf{M}} \gamma^{\gamma\mu} \gamma^{\lambda\lambda} \\ & + \gamma^{z\mathbf{M}} \left[\frac{\gamma^{\lambda\mu}}{2} \Gamma_{\lambda} \Gamma_{\mu} + \frac{\Gamma_{[\lambda\gamma}^{\lambda}}{4} \partial_{\gamma} \gamma^{\gamma\gamma} \right] - \frac{\gamma^{z\gamma}}{2} \partial_{\gamma} \mathbf{F}^{\mathbf{M}} - \frac{\gamma^{\mathbf{M}\gamma}}{2} \partial_{\gamma} \mathbf{F}^z \\ & + \frac{\mathbf{F}\rho}{2} \partial_{\rho} \gamma^{z\mathbf{M}} + \frac{\gamma^{\alpha\mathbf{M}}}{2} (\partial_{\rho} \mathbf{F}^{\rho} + \Gamma_{\rho}^{\alpha} \mathbf{F}^{\rho}) \end{aligned}$$

Après calculs, on trouve que les termes linéaires ne comportant pas de dérivation par rapport à x^n , sont à l'ordre p :

$$\frac{\mathbf{I}}{2C^p} \sum_{\mathbf{B}, \mathbf{C}} \partial_{\mathbf{B}} [-\partial_{\mathbf{B}} \Gamma_{(\rho)}^{\alpha\mathbf{M}} + \partial_{\mathbf{M}} \Gamma_{(\rho)}^{\mathbf{B}z} + \delta_{\mathbf{B}}^z \partial_{\mathbf{C}} \Gamma_{(\rho)}^{\mathbf{CM}} - \delta_{\mathbf{M}}^z \partial_{\mathbf{C}} \Gamma_{(\rho)}^{\mathbf{BC}}].$$

Cette dernière expression est de la forme $\partial_{\mathbf{B}} \mathbf{F}^{\alpha\mathbf{MB}}$ où

$$\mathbf{F}^{\alpha\mathbf{MB}} = -\mathbf{F}^{\alpha\mathbf{BM}}.$$

Considérons l'intégrale

$$\mathbf{I} = \int_{\partial C} \partial_{\mathbf{B}} \mathbf{F}^{\alpha\mathbf{MB}} \nu_{\mathbf{M}} \sqrt{|\mathcal{G}'|} dt^1 \wedge \dots \wedge dt^{n-2},$$

Elle s'écrit

$$\mathbf{I} = \int_{\partial C} \varepsilon_{\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_{n-1}}^{\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_{n-1}} \partial_{\mathbf{B}} \mathbf{F}^{\alpha\mathbf{MB}} dx^{\mathbf{A}_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mathbf{A}_{n-1}} + \mathcal{O}\left(\frac{\mathbf{I}}{C^{p+1}}\right).$$

On peut toujours trouver $f_{k_1, \dots, k_{n-1}}$ complètement antisymétrique tel que

$$\mathbf{F}^{z\mathbf{MB}} = \varepsilon_{\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_{n-1}}^{k_1, \dots, k_{n-1}} \mathbf{F}_{k_1, \dots, k_{n-1}}^{\mathbf{B}},$$

$\mathbf{I}$ devient alors

$$\mathbf{I} = \int_{\partial C} \frac{\varepsilon_{\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_{n-1}}^{k_1, \dots, k_{n-1}} \mathbf{M}^{\mathbf{B}}}{(n-2)!} \partial_{\mathbf{B}} f_{k_1, \dots, k_{n-1}} dx^{\mathbf{A}_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mathbf{A}_{n-1}} + \mathcal{O}\left(\frac{\mathbf{I}}{C^{p+1}}\right)$$

ou encore

$$I = \int_{\partial C} (-1)^{n-2} \partial_B f_{A_1 \dots A_{n-3}} dx^B \wedge dx^{A_1} \wedge \dots \wedge dx^{A_{n-3}} + O\left(\frac{1}{c^{p+1}}\right)$$

et d'après la formule de Stokes :

$$I = (-1)^{n-2} \int_{\partial(\partial C)} f_{A_1 \dots A_{n-3}} dx^{A_1} \wedge \dots \wedge dx^{A_{n-3}} + O\left(\frac{1}{c^{p+1}}\right),$$

donc

$$I = O\left(\frac{1}{c^{p+1}}\right).$$

Nous pouvons donc énoncer :

QUATRIÈME PROPRIÉTÉ. — $\sigma_{(p)}^\alpha$ ne dépend que des potentiels d'ordre au plus égal à $(p-1)$.

CONCLUSION. — Le résultat des propriétés que nous venons d'énoncer est le suivant :

Supposons que les équations de champ du cas extérieur soient satisfaites jusqu'à l'ordre $(p-1)$ compris, c'est-à-dire

$$S_{(l)}^{\alpha\beta} = 0, \quad l \leq p-1.$$

Les conditions

$$\sum_{l \leq p} \frac{\sigma_{(l)}^\alpha}{c^l} + O\left(\frac{1}{c^{p+2}}\right) = 0$$

s'expriment en fonction des potentiels d'ordre au plus égal à $(p-1)$, qui sont solutions des équations précédentes. Nous vérifierons dans les applications que les conditions

$$\sum_{l \leq p} \frac{\sigma_{(l)}^\alpha}{c^l} + O\left(\frac{1}{c^{p+2}}\right) = 0$$

ne sont pas identiquement vérifiées, car il ne semble pas qu'il soit possible de le montrer *a priori*. S'il en est ainsi, d'après la troisième propriété, nous pourrions dire que $\sum_{l \leq p} \frac{\sigma_{(l)}^\alpha}{c^l} + O\left(\frac{1}{c^{p+2}}\right) = 0$ représente à l'ordre p les équations de mouvement relatives au domaine de singularité Γ .

Nous appliquerons ce résultat pour établir les équations de mouvement en première approximation, dans le cas particulier où le champ extérieur possède N singularités ponctuelles à symétrie sphérique.

25. **Application de la méthode précédente au cas où le champ extérieur possède N singularités ponctuelles, à symétrie sphérique.** — Appliquons la méthode des singularités définie dans le paragraphe précédent pour $n=4$, c'est-à-dire en théorie de Jordan-Thiry. Les calculs sont menés en coordonnées isothermes en choisissant comme inconnues les densités tensorielles $\Gamma^{\alpha\beta}$. Supposons de plus que le champ, satisfaisant les équations de champ du cas extérieur, possède en projection dans W_3 , N singularités ponctuelles à symétrie sphérique. Nous avons montré au paragraphe 23, qu'en première approximation, on peut considérer le champ extérieur comme s'il était produit par N domaines à symétrie sphérique, ayant pour centres les N singularités; si le rayon de chaque domaine est arbitrairement petit, les N domaines recevront l'interprétation de N particules matérielles de masses m_s et de charges e_s ($s = 1, 2, \dots, N$). Comme au paragraphe 23, nous supposerons W_3 homéomorphe à l'espace euclidien E_3 .

Cherchons les équations de mouvement relatives à la $k^{\text{ième}}$ singularité G_k . En première approximation, les développements limités de $\gamma_{\alpha\beta}$, $\gamma^{\alpha\beta}$ et $\Gamma^{\alpha\beta}$ sont donnés par (III.24), (III.23) et par (III.22), U_s , V_s et W_s ayant les valeurs (III.25) à l'extérieur de G_s .

Désignons par ξ_k^M les coordonnées de G_k et par x^M celles du point courant de W_3 , relativement à E_3 . D'après la troisième propriété énoncée au paragraphe 24, les équations de mouvement sont indépendantes en première approximation du domaine C_k entourant G_k : nous pouvons ainsi choisir pour C_k une sphère de centre G_k dont nous ferons tendre le rayon vers zéro. En première approximation, les équations de mouvement s'écrivent alors

$$(IV.6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\tau_{(1)}^1}{c^3} + O\left(\frac{1}{c^5}\right) = 0, \\ \frac{\sigma_{(3)}^0}{c^3} + O\left(\frac{1}{c^5}\right) = 0, \\ \frac{\tau_{(1)}^A}{c^4} + O\left(\frac{1}{c^6}\right) = 0, \end{array} \right.$$

où σ^α a pour expression, d'après (IV. 1) :

$$\sigma^\alpha = \int_{\partial C_k} \vec{S}_{(\alpha)} \vec{\nu} dS,$$

dS désignant l'élément d'aire de ∂C_k .

En utilisant les coordonnées polaires (r_k, θ, φ) ayant pour pôle G_k , $\sigma_{(p)}^\alpha$ peut encore s'écrire, compte tenu de $S_{(l)}^{\alpha\beta} = 0$ avec $l < p$:

$$(IV. 7) \quad \sigma_{(p)}^\alpha = \int_{\partial C_k} S_{(p)}^{\alpha M} \frac{x^M - \xi_k^M}{r_k} r_k^\alpha \sin \theta d\theta d\varphi.$$

Nous supposons maintenant et dans la suite de ce travail que les indices écrits en majuscules latines et répétés dans un même monome, sont sommés de 1 à 3 (même si nous avons négligé d'écrire le signe de sommation).

Dans la pratique, pour simplifier les calculs, nous ferons tendre r_k vers zéro, puisque $\sigma_{(p)}^\alpha$ est indépendant du domaine C_k entourant G_k . Nous utiliserons le signe $\sim$ pour signifier que nous calculons $S^{\alpha M}$ modulo des termes qui n'ont pas de contribution dans les équations de mouvement en première approximation.

26. Calcul de certaines intégrales. — Afin d'établir les équations de mouvement en première approximation, nous allons calculer trois intégrales lorsque r_k tend vers zéro.

$$a. \quad I = \lim_{r_k \rightarrow 0} \int_{\partial C_k} \partial_A P \partial_M P \frac{X^M}{r_k} dS.$$

Nous avons posé

$$X^M = x^M - \xi_k^M; \quad P = \sum_s \frac{P_s}{r_s}; \quad dS = r_k^2 \sin \theta d\theta d\varphi,$$

où P_s peut dépendre du temps.

L'indice q sera supposé différent de k .

Décomposons $\partial_A P \partial_M P$:

$$\begin{aligned} \partial_A P \partial_M P &= \left(\sum_q \partial_A \frac{P_q}{r_q} \right) \left(\sum_q \partial_M \frac{P_q}{r_q} \right) \\ &+ \left(\sum_q \partial_A \frac{P_q}{r_q} \right) \partial_M \frac{P_k}{r_k} + \partial_A \frac{P_k}{r_k} \left(\sum_q \partial_M \frac{P_q}{r_q} \right) + \partial_A \frac{P_k}{r_k} \partial_M \frac{P_k}{r_k}, \end{aligned}$$

ce qui entraîne la décomposition correspondante pour I. Nous avons évidemment

$$\lim_{r_k \rightarrow 0} \int_{\partial C_k} \left(\sum_q \partial_A \frac{P_q}{r_q} \right) \left(\sum_q \partial_M \frac{P_q}{r_q} \right) \frac{X^M}{r_k} dS = 0.$$

Montrons que

$$\lim_{r_k \rightarrow 0} \int_{\partial C_k} \left(\sum_q \partial_A \frac{P_q}{r_q} \right) \partial_M \frac{P_k}{r_k} \frac{X^M}{r_k} dS = \left(\sum_q \tilde{\partial}_A \frac{P_q}{r_q} \right) \lim_{r_k \rightarrow 0} \int_{\partial C_k} \partial_M \frac{P_k}{r_k} \frac{X^M}{r_k} dS,$$

où $\tilde{\partial}_A \frac{P_q}{r_q}$ est la dérivée partielle par rapport à x^A de $\frac{P_q}{r_q}$, prise au point ($x^1 = \xi_k^1$, $x^2 = \xi_k^2$, $x^3 = \xi_k^3$).

En effet, on peut choisir $\eta > 0$ assez petit, pour que l'inégalité $r_k < \eta$ entraîne $|\partial_A P_q - \tilde{\partial}_A P_q| < \varepsilon$; ε a été choisi > 0 arbitrairement petit, quel que soit q . On a alors

$$\left| \int_{\partial C_k} \left(\sum_q \partial_A \frac{P_q}{r_q} - \sum_q \tilde{\partial}_A \frac{P_q}{r_q} \right) \partial_M \frac{P_k}{r_k} \frac{X^M}{r_k} dS \right| < (N-1) \varepsilon M.$$

où M est borné. Or

$$\lim_{r_k \rightarrow 0} \int_{\partial C_k} \partial_M \frac{P_k}{r_k} \frac{X^M}{r_k} dS = -4\pi P_k,$$

donc

$$\lim_{r_k \rightarrow 0} \int_{\partial C_k} \left(\sum_q \partial_A \frac{P_q}{r_q} \right) \partial_M \frac{P_k}{r_k} \frac{X^M}{r_k} dS = -4\pi P_k \sum_q \tilde{\partial}_A \frac{P_q}{r_q}.$$

Par une démonstration analogue :

$$\lim_{r_k \rightarrow 0} \int_{\partial C_k} \partial_A \frac{P_k}{r_k} \left(\sum_q \partial_M \frac{P_q}{r_q} \right) \frac{X^M}{r_k} dS = -\frac{4\pi}{3} P_k \sum_q \tilde{\partial}_A \frac{P_q}{r_q}.$$

Enfin

$$\int_{\partial C_k} \partial_A \frac{P_k}{r_k} \partial_M \frac{P_k}{r_k} \frac{X^M}{r_k} dS = \frac{1}{r_k^4} \int_{\partial C_k} \frac{X^A}{r_k} \frac{X^M}{r_k} \frac{X^M}{r_k} dS = 0.$$

Cette dernière intégrale est donc nulle quel que soit r_k .

En groupant les divers résultats obtenus, il vient

$$(IV.8) \quad \lim_{r_k \rightarrow 0} \int_{\partial C_k} \partial_A P \partial_M P \frac{X^M}{r_k} dS = -\frac{16\pi}{3} P_k \sum_q \tilde{\partial}_A \frac{P_q}{r_q}.$$

Le calcul des intégrales suivantes étant analogue à celui que nous venons d'effectuer, nous ne donnerons que les résultats :

b.

$$(IV.9) \quad \lim_{r_k \rightarrow 0} \int_{\partial C_k} \sum_B (\partial_B P)^2 \frac{X^A}{r_k} dS = -\frac{8\pi}{3} P_k \sum_q \tilde{\partial}_A P_q;$$

c.

$$(IV.10) \quad \lim_{r_k \rightarrow 0} \int_{\partial C_k} \partial_{AB} P \frac{X^M}{r_k} dS = 0.$$

Remarquons qu'il résulte de *a* et *b* :

$$(IV.11) \quad \partial_A P \partial_M P \sim 2 \delta_A^M \sum_B (\partial_B P)^2.$$

Ce dernier résultat sera quelquefois utilisé pour permettre des simplifications dans le calcul de S^{2M} , avant d'intégrer.

27. Premier groupe d'équations de mouvement, en première approximation. — Calculons $\sigma_{(3)}^k$ pour obtenir la première équation de mouvement (IV.6).

D'après (IV.5)

$$S^{A^4} = \frac{\partial_A F^4}{2} + O\left(\frac{1}{c^5}\right)$$

et d'après (III.22) et (III.25) :

$$\begin{aligned} S^{A^4} &= \frac{2}{c^3} \partial_{tA} \sum_s \frac{G m_s}{r_s} + O\left(\frac{1}{c^5}\right) \\ &= \frac{1}{c^3} \left[-2 \sum_s G m_s \partial_{AB} \frac{\xi_s^B}{r_s} + \sum_s 2 G \dot{m}_s \partial_A \frac{1}{r_s} \right] + O\left(\frac{1}{c^5}\right), \end{aligned}$$

(IV.10) entraîne alors

$$\begin{aligned} S_{(3)}^{A^4} &\sim 2 G \dot{m}_k \partial_A \frac{1}{r_k}, \\ \sigma_{(3)}^k &= -8\pi G \dot{m}_k. \end{aligned}$$

Donc la première équation de mouvement s'écrit

$$(IV.12) \quad \dot{m}_k = 0.$$

Nous avons de même :

$$\begin{aligned} S_{(3)}^{0A} &\sim \frac{\dot{e}_k}{2} \partial_A \frac{1}{r_k}, \\ \sigma_{(3)}^0 &= -2\pi \dot{e}_k. \end{aligned}$$

Donc la deuxième équation de mouvement (IV.6) s'écrit

$$(IV.13) \quad \dot{\epsilon}_k = 0.$$

Les conditions (IV.12) et (IV.13) ont déjà été obtenues dans le paragraphe 23, à partir des conditions d'isothermie, mais il est intéressant qu'elles puissent se déduire des équations de mouvement, indépendamment des conditions d'isothermie.

28. **Calcul de $S_{\lambda\lambda}^{AM}$ en coordonnées quelconques.** — Dans ce paragraphe, quelques calculs intermédiaires seront faits afin d'écrire la troisième équation de mouvement (IV.6).

a. Calcul en première approximation de $\Gamma_{\lambda\rho}^A$. — Par définition :

$$\Gamma_{\lambda\rho}^A = \frac{\gamma^{\lambda\sigma}}{2} [\partial_\lambda \gamma_{\rho\sigma} + \partial_\rho \gamma_{\lambda\sigma} - \partial_\sigma \gamma_{\lambda\rho}],$$

d'où

$$(IV.14) \quad \Gamma_{\lambda\rho}^A = -\frac{1}{2} [\partial_\lambda \gamma_{\rho A} + \partial_\rho \gamma_{\lambda A} - \partial_A \gamma_{\lambda\rho}] + O\left(\frac{1}{c^4}\right).$$

Les potentiels sont déterminés en première approximation par (III.24) et par (III.25). Posons

$$(IV.15) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_{44} = -\frac{W+8U}{3} = -\frac{1}{3} \left(\sum_s \frac{e_s^2}{m_s r_s} + 8 \sum_s \frac{G m_s}{r_s} \right), \\ \alpha_{00} = -\frac{2W+4U}{3} = -\frac{1}{3} \left(2 \sum_s \frac{e_s^2}{m_s r_s} + 4 \sum_s \frac{G m_s}{r_s} \right), \\ P = \alpha_{00} - \alpha_{44} = \frac{1}{3} \left(4 \sum_s \frac{G m_s}{r_s} - \sum_s \frac{e_s^2}{m_s r_s} \right) = \frac{1}{3} (4U - W), \end{array} \right.$$

(IV.14) entraîne alors

$$\Gamma_{00}^A = \frac{\partial_A \alpha_{00}}{2c^2} + O\left(\frac{1}{c^4}\right),$$

$$\Gamma_{44}^A = \frac{\partial_A \alpha_{44}}{2c^2} + O\left(\frac{1}{c^4}\right),$$

$$\Gamma_{0i}^A = \frac{\partial_A \alpha_{0i}}{c^2} + O\left(\frac{1}{c^4}\right),$$

$$\Gamma_{0A}^B = O\left(\frac{1}{c^4}\right),$$

$$\Gamma_{iB}^A = O\left(\frac{1}{c^4}\right),$$

$$\Gamma_{BC}^A = \frac{1}{2c^2} [\delta_C^A \partial_B P + \delta_B^A \partial_C P - \delta_B^C \partial_A P] + O\left(\frac{1}{c^4}\right).$$

b. Calcul des différents termes intervenant dans $S_{(4)}^{AM}$, d'après l'expression (IV.5) :

$$\Gamma_\lambda = \partial_\lambda \text{Log } \sqrt{\gamma} = \frac{\partial_\lambda P}{c^2} + O\left(\frac{1}{c^4}\right),$$

donc

$$-\frac{\gamma^{\lambda\mu}}{\sqrt{\gamma}} \Gamma_\mu \partial_\lambda \Gamma^{AM} = O\left(\frac{1}{c^6}\right)$$

et

$$(IV.16) \quad \frac{\gamma^{AM}}{2} \gamma^{\lambda\mu} \Gamma_\lambda \Gamma_\mu = \frac{1}{2c^4} \delta_A^M \sum_B (\partial_B P)^2 + O\left(\frac{1}{c^6}\right).$$

Calculons maintenant l'expression suivante :

$$-\Gamma_{\alpha\gamma}^A \Gamma_{\beta\delta}^M \gamma^{\alpha\beta} \gamma^{\gamma\delta} = -\Gamma_{\lambda\rho}^A \Gamma_{\lambda\rho}^M \eta^{\lambda\lambda} \eta^{\rho\rho} + O\left(\frac{1}{c^6}\right).$$

D'après l'alinéa *a* de ce paragraphe et en utilisant la remarque (IV.11), on trouve

$$(IV.17) \quad -\Gamma_{\alpha\gamma}^A \Gamma_{\beta\delta}^M \gamma^{\alpha\beta} \gamma^{\gamma\delta} \sim \left[-\frac{1}{4} \partial_A \alpha_{00} \partial_M \alpha_{00} - \frac{1}{4} \partial_A \alpha_{44} \partial_M \alpha_{44} + 2 \partial_A V \partial_M V \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \delta_A^M \sum_B (\partial_B P)^2 - \frac{1}{4} \partial_A P \partial_M P \right] \frac{1}{c^4} + O\left(\frac{1}{c^6}\right).$$

On obtient de même les relations suivantes :

$$(IV.18) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{4} \gamma^{AM} \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \partial_\alpha \gamma^{\beta\gamma} &= -\frac{1}{4} \delta_A^M \Gamma_{\beta\gamma}^B \partial_B \gamma^{\beta\gamma} + O\left(\frac{1}{c^6}\right) \\ &= \left[\frac{\delta_A^M}{8} \sum_B (\partial_B \alpha_{00})^2 + \frac{\delta_A^M}{8} \sum_B (\partial_B \alpha_{44})^2 \right. \\ &\quad \left. - \delta_A^M \sum_B (\partial_B V)^2 + \frac{\delta_A^M}{8} \sum_B (\partial_B P)^2 \right] \frac{1}{c^4} + O\left(\frac{1}{c^6}\right), \\ \frac{F_\rho}{2} \partial_\rho \gamma^{AM} &= \frac{1}{2\sqrt{\gamma}} \partial_\mu \Gamma^{\rho\mu} \partial_\rho \gamma^{AM} = O\left(\frac{1}{c^6}\right), \\ \frac{\gamma^{AM}}{2} \Gamma_{\alpha\rho}^\alpha F_\rho &= \frac{1}{2\sqrt{\gamma}} \gamma^{AM} \Gamma_{\alpha\rho}^\alpha \partial_\mu \Gamma^{\mu\rho} = O\left(\frac{1}{c^6}\right), \end{aligned} \right.$$

$$(IV.19) \quad -\frac{\gamma^{A\rho}}{2} \partial_\rho F^M = \left[\frac{1}{2} \partial_{AB} \Gamma_{(4)}^{BM} + 2 \partial_{AL} Q^M \right] \frac{1}{c^4} + O\left(\frac{1}{c^6}\right),$$

$$(IV.20) \quad \frac{\gamma_{\rho}^{\mathbf{M}\rho}}{2} \partial_{\rho} F^{\mathbf{A}} = \left[\frac{1}{2} \partial_{\mathbf{M}\mathbf{B}} \Gamma_{\{\mathbf{A}}^{\mathbf{B}\}} + \frac{1}{2} \partial_{\mathbf{M}\mathbf{t}} Q^{\mathbf{A}} \right] \frac{1}{c^4} + O\left(\frac{1}{c^6}\right),$$

$$(IV.21) \quad \frac{\gamma^{\mathbf{A}\mathbf{M}}}{2} \partial_{\rho} F^{\rho} = -\frac{\delta_{\mathbf{A}}^{\mathbf{M}}}{c^4} \left[2 \partial_{\mathbf{t}} U + \partial_{\mathbf{B}\mathbf{t}} Q^{\mathbf{B}} + \frac{1}{2} \partial_{\mathbf{B}\mathbf{C}} \Gamma_{\{\mathbf{A}}^{\mathbf{B}\mathbf{C}} \}} \right] + O\left(\frac{1}{c^6}\right),$$

$$(IV.22) \quad \frac{\gamma_{\lambda\mu}^{\lambda\mu}}{2\sqrt{\gamma}} \partial_{\lambda\mu} \Gamma^{\mathbf{A}\mathbf{M}} = -\frac{1}{2c^4} \sum_{\mathbf{B}} \partial_{\mathbf{B}\mathbf{B}} \Gamma_{\{\mathbf{A}}^{\mathbf{M}} \}} + O\left(\frac{1}{c^6}\right).$$

c. Calcul de $S_{\{\mathbf{A}}^{\mathbf{M}} \}}$. — En groupant les résultats obtenus dans les relations numérotées de (IV.16) à IV.22), nous pouvons calculer $S_{\{\mathbf{A}}^{\mathbf{M}} \}}$ modulo des termes qui ne donnent pas de contribution dans les équations de mouvement suivantes :

$$\frac{\tau_{\{\mathbf{A}}^{\mathbf{M}} \}}{c^4} + O\left(\frac{1}{c^6}\right) = 0.$$

D'après la quatrième propriété du paragraphe 24, les termes linéaires qui ne comportent pas de dérivation par rapport à $x^{\mathbf{A}}$, n'interviennent pas dans les équations de mouvement; d'après les relations (IV.19), (IV.20), (IV.21), et (IV.22), ces termes groupés donnent

$$\frac{1}{2} \partial_{\mathbf{B}} [-\partial_{\mathbf{B}} \Gamma_{\{\mathbf{A}}^{\mathbf{M}} \}} + \partial_{\mathbf{M}} \Gamma_{\{\mathbf{A}}^{\mathbf{B}} \}} + \delta_{\mathbf{B}}^{\mathbf{A}} \partial_{\mathbf{C}} \Gamma_{\{\mathbf{A}}^{\mathbf{C}\mathbf{M}} \}} - \delta_{\mathbf{M}}^{\mathbf{A}} \partial_{\mathbf{C}} \Gamma_{\{\mathbf{A}}^{\mathbf{B}\mathbf{C}} \}}].$$

Cette expression se met donc sous la forme $\partial_{\mathbf{B}} F^{\mathbf{A}\mathbf{M}\mathbf{B}}$ avec

$$F^{\mathbf{A}\mathbf{M}\mathbf{B}} = -F^{\mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{M}}.$$

Donc, en revenant à la démonstration de la quatrième propriété :

$$\int_{\sigma \subset \mathcal{C}_k} \partial_{\mathbf{B}} F^{\mathbf{A}\mathbf{M}\mathbf{B}} \frac{X^{\mathbf{M}}}{r_k} dS = 0.$$

Compte tenu de (IV.11) et des résultats ci-dessus, il vient

$$(IV.23) \quad S_{\{\mathbf{A}}^{\mathbf{M}} \}} \sim 2 \partial_{\mathbf{A}\mathbf{t}} Q^{\mathbf{M}} + 2 \partial_{\mathbf{M}\mathbf{t}} Q^{\mathbf{A}} - 2 \delta_{\mathbf{A}}^{\mathbf{M}} \partial_{\mathbf{t}} U - 4 \delta_{\mathbf{A}}^{\mathbf{M}} \partial_{\mathbf{B}\mathbf{t}} Q^{\mathbf{B}} - \frac{3}{16} \partial_{\mathbf{A}} \alpha_{00} \partial_{\mathbf{M}} \alpha_{00} \\ - \frac{3}{16} \partial_{\mathbf{A}} \alpha_{\mathbf{A}\mathbf{A}} \partial_{\mathbf{M}} \alpha_{\mathbf{A}\mathbf{A}} + \frac{3}{2} \partial_{\mathbf{A}} V \partial_{\mathbf{M}} V - \frac{3}{16} \partial_{\mathbf{A}} P \partial_{\mathbf{M}} P.$$

29. Deuxième groupe d'équations de mouvement, en première approximation. — Nous nous proposons d'écrire les équations de mouvement suivantes :

$$\frac{\tau_{\{\mathbf{A}}^{\mathbf{M}} \}}{c^4} + O\left(\frac{1}{c^6}\right) = 0,$$

où

$$\sigma_{(4)}^A = \int_{\partial C_k} S_{(4)}^A \frac{X^M}{r_k} dS.$$

Le calcul de $\sigma_{(4)}^A$ est conduit en cherchant la contribution de chaque terme de (IV.23). Nous utiliserons (IV.8), (IV.9) et (IV.10). De plus, (III.25) permet d'écrire

$$\begin{aligned} \partial_A \epsilon Q^M &= \sum_s \partial_A U_s \tilde{\xi}_s^M - \sum_s \tilde{\xi}_s^M \dot{\xi}_s^B \partial_{AB} U_s, \\ \partial_\beta U &= - \sum_s \tilde{\xi}_s^B \partial_B U_s + \sum_s \dot{\xi}_s^B \dot{\xi}_s^C \partial_{BC} U_s. \end{aligned}$$

Formons un tableau à deux colonnes groupant les résultats, la première colonne comprenant le terme de $S_{(4)}^A$ que nous intégrons et la deuxième colonne la contribution de ce terme dans les équations de mouvement :

$2 \partial_A \epsilon Q^M$	$-\frac{8\pi}{3} G m_k \tilde{\xi}_k^A$
$2 \partial_M \epsilon Q^A$	$-\frac{8\pi}{3} G m_k \tilde{\xi}_k^A$
$-\frac{1}{2} \partial_A^M \partial_\beta U$	$-\frac{8\pi}{3} G m_k \tilde{\xi}_k^A$
$-\frac{1}{4} \partial_A^M \partial_{B\ell} Q^B$	$\frac{16\pi}{3} G m_k \tilde{\xi}_k^A$
$-\frac{3}{16} \partial_A \alpha_{00} \partial_M \alpha_{00}$	$\frac{4\pi}{9} \left[2 G m_k + \frac{e_k^2}{m_k} \right] \sum_q \tilde{\partial}_A \frac{2 G m_q + \frac{e_q^2}{m_q}}{r_q}$
$-\frac{3}{16} \partial_A \alpha_{ii} \partial_M \alpha_{ii}$	$\frac{\pi}{9} \left[8 G m_k + \frac{e_k^2}{m_k} \right] \sum_q \tilde{\partial}_A \frac{8 G m_q + \frac{e_q^2}{m_q}}{r_q}$
$\frac{3}{2} \partial_A V \partial_M V$	$-\frac{8\pi}{3} G e_k \sum_q \tilde{\partial}_A \frac{e_q}{r_q}$
$-\frac{3}{16} \partial_A P \partial_M P$	$\frac{\pi}{9} \left[4 G m_k - \frac{e_k^2}{m_k} \right] \sum_q \tilde{\partial}_A \frac{4 G m_q - \frac{e_q^2}{m_q}}{r_q}$

Les équations de mouvement de la $k^{\text{ième}}$ particule peuvent donc s'écrire, en première approximation :

$$(IV.24) \quad -m_k \ddot{\xi}_k^A + m_k \sum_q \tilde{\partial}_A \frac{G m_q}{r_q} - e_k \sum_q \tilde{\partial}_A \frac{e_q}{r_q} \\ + \frac{1}{3} \left(\frac{e_k^2}{2 G m_k} + m_k \right) \sum_q \tilde{\partial}_A \left(G m_q + \frac{e_q^2}{2 m_q} \right) \frac{1}{r_q} = O \left(\frac{1}{c^2} \right),$$

équations auxquelles il faut ajouter celle du paragraphe 27 :

$$(IV.25) \quad \begin{cases} \dot{m}_k = 0, \\ \dot{e}_k = 0. \end{cases}$$

Si nous comparons les équations de mouvement (IV.24) à celles obtenues en électromagnétisme classique, nous remarquons qu'il apparaît un terme supplémentaire qui n'est pas négligeable :

$$\frac{1}{3} \left(\frac{e_k^2}{2 G m_k} + m_k \right) \sum_q \tilde{\partial}_A \left(G m_q + \frac{e_q^2}{2 m_q} \right) \frac{1}{r_q}.$$

30. Équations de mouvement, en première approximation, par la méthode du tenseur impulsion-énergie. — Montrons qu'en première approximation les équations de mouvement obtenues par la méthode du tenseur impulsion-énergie sont identiques à celles déduites par la méthode des singularités. La méthode du tenseur impulsion-énergie en théorie de Jordan-Thiry généralise celle de la relativité générale et a été étudiée par F. Hennequin dans le schéma matière pure ([27], p. 64).

On suppose qu'une région de la variété V_3 est balayée par une distribution finie de masses et de charges, cette région étant représentée dans une section d'espace W_3 par N domaines S_s ($s = 1, \dots, N$). Dans cette région, les équations de champ sont celles du cas intérieur du schéma fluide parfait. Le champ est supposé quasi galiléen, à comportement asymptotique euclidien. De plus, il est possible de définir pour chaque domaine S_s de W_3 une vitesse moyenne de translation, cette vitesse étant petite devant c . Les équations de mouvement se déduisent des conditions de conservation que nous prendrons sous la forme (II.15). Les calculs seront effectivement faits en première approximation. Rappelons que les valeurs en première approximation de $\Gamma^{\alpha\beta}$, $\gamma^{\alpha\beta}$ et $\gamma_{\alpha\beta}$ solutions des équations de champ sont données par (III.22), (III.23) et (III.24).

a. L'une des conditions de conservation est

$$(IV.26) \quad D_{\alpha} \theta_0^{\alpha} \equiv D_{\alpha} (r^{\nu\alpha} \nu_0) = 0$$

or, d'après la première relation (II.36), (IV.26) s'écrit aussi

$$(IV.27) \quad \nabla_j [\xi \theta_0^j] = 0.$$

Le premier membre de (IV.27) est un scalaire de V_4 que nous allons intégrer sur un domaine A_4 de V_4 , de bord ∂A_4 . Or

$$\nabla_j (\xi \theta_0^j) \equiv \frac{\partial_j (\xi \theta_0^j \sqrt{-g})}{\sqrt{-g}}.$$

On rappelle que g est le déterminant des g_{ij} . (IV.27) entraîne donc

$$(IV.28) \quad I \equiv \int_{A_4} \partial_j (\xi \theta_0^j \sqrt{-g}) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^4 = 0,$$

I représente le flux du vecteur $\vec{P}$ de composantes contravariantes $P^j = \xi \theta_0^j$ à travers ∂A_4 , c'est-à-dire

$$\int_{\partial A_4} \frac{1}{3!} \eta_{j l_1 l_2 l_3} \xi \theta_0^j dx^{l_1} \wedge dx^{l_2} \wedge dx^{l_3}.$$

En effet, un simple calcul entraîne

$$I = \int_{A_4} d \left[\frac{1}{3!} \eta_{j l_1 l_2 l_3} \xi \theta_0^j dx^{l_1} \wedge dx^{l_2} \wedge dx^{l_3} \right],$$

d désignant le symbole de différentiation extérieure, $\eta_{j l_1 l_2 l_3}$ le tenseur élément de volume défini sur V_4 munie de la métrique

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j.$$

(IV.28) étant vraie quel que soit le domaine A_4 , on suppose qu'on peut choisir A_4 engendré par des lignes tangentes à $\vec{P}$, et aussi par deux sections s_{l_1} et s_{l_2} respectivement définies par $t = t_1$ et $t = t_2$. (IV.28) se réduit alors à

$$(IV.29) \quad \int_{s_{l_1}} \xi \theta_0^{l_1} \sqrt{-g} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 - \int_{s_{l_2}} \xi \theta_0^{l_2} \sqrt{-g} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 = 0.$$

Si nous supposons t_2 variable et faisons tendre t_2 vers t_1 , nous déduisons de (IV.29) :

$$(IV.30) \quad \frac{d}{dt} \left[\int_{s_t} \xi \Theta_0^4 \sqrt{-g} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \right] = 0,$$

où s_t est un domaine fonction de t , défini comme section d'espace d'un tube de lignes tangentes à $\vec{P}$.

Dans le schéma matière pure ou fluide parfait :

$$\Theta_0^j = r v_0 v^j.$$

Remarquons que nous obtiendrions le même résultat (IV.30) si V_4 était munie d'une métrique conforme à ds^2 , en ne tenant pas compte des interprétations physiques différentes qui en résulteraient.

Dans le schéma matière pure ou fluide parfait, (IV.30) devient

$$\frac{d}{dt} \left[\int_{s_t} r v_0 v^4 \xi \sqrt{-g} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \right] = 0,$$

s_t est alors défini comme section d'espace d'un tube de lignes de courant et d'après (II.6') et (II.6'') :

$$(IV.31) \quad \frac{d}{dt} \left[\int_{s_t} \mu \dot{u}^4 \sqrt{-g} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \right] = 0.$$

(IV.31) s'écrit en première approximation, si nous choisissons pour s_t le $k^{\text{ième}}$ domaine S_k de charge e_k :

$$(IV.32) \quad \frac{d}{dt} \left[\int_{S_k} \mu dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \right] = 0$$

ou encore

$$\dot{e}_k = 0.$$

b. Une deuxième condition de conservation (II.15) se traduit par la propriété que sur toute ligne de courant :

$$(IV.33) \quad \frac{dv_0}{v_0} + \varepsilon \frac{dl}{r} = 0.$$

Dans le schéma matière pure, (IV.33) exprime que v_0 est constant sur toute ligne de courant.

Dans le schéma fluide parfait, on obtient, en première approximation, la propriété suivante vraie sur toute ligne de courant :

$$v_0 = \text{Cte} + O\left(\frac{1}{c^2}\right),$$

ce qui, d'après (III. 14), s'écrit en première approximation :

$$(IV.34) \quad \frac{\mu}{\rho} = \text{Cte.}$$

D'où il résulte, d'après (IV. 32) :

$$(IV.35) \quad \frac{d}{dt} \int_{s_t} \rho \, dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 = 0,$$

où s_t est définie comme section d'espace d'un tube de lignes de courant. Ceci entraîne la propriété suivante pour le $k^{\text{ième}}$ domaine S_k de masse m_k :

$$(IV.36) \quad \frac{d}{dt} \left[\int_{S_k} \rho \, dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \right] = 0$$

ou

$$\dot{m}_k = 0.$$

c. Les conditions de conservation (II. 15) qu'il reste à utiliser sont

$$(IV.37) \quad D_\alpha \Theta_A^\alpha = 0.$$

En intégrant ces équations sur le $k^{\text{ième}}$ domaine S_k d'une section d'espace W_3 , on obtient les équations de mouvement de ce domaine. γ étant proportionnel au déterminant des composantes covariantes du tenseur métrique choisi sur W_3 , (IV. 37) entraîne

$$(IV.38) \quad \int_{S_k} D_\alpha \Theta_A^\alpha \sqrt{\gamma} \, dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 = 0,$$

avec

$$(IV.39) \quad D_\alpha \Theta^\alpha \equiv \frac{\partial_\alpha (\Theta_A^\alpha \sqrt{\gamma})}{\sqrt{\gamma}} - \frac{1}{2} \Theta^{\alpha\sigma} \partial_A \gamma_{\alpha\sigma}$$

or, dans le schéma fluide parfait :

$$\Theta_A^\alpha = r \, v^\alpha v_A - l \, \gamma_A^\alpha,$$

donc

$$\begin{aligned} \partial_\alpha (\Theta_A^\alpha \sqrt{\gamma}) &\equiv \partial_i (r \, v^i v_A \sqrt{\gamma}) - \partial_A (l \sqrt{\gamma}) \\ &\equiv \partial_B \left(\frac{r}{c} v^i v_A \sqrt{\gamma} \frac{dx^B}{dt} \right) + \partial_i (r \, v^i v_A \sqrt{\gamma}) - \partial_A (l \sqrt{\gamma}). \end{aligned}$$

D'une part, Θ_A^i a la même expression $r\varphi^i v_A$ dans le schéma matière pure ou le schéma fluide parfait, d'autre part $\frac{dx^B}{dt}$ est supposé constant sur S_k ; $\partial_x(\Theta_A^z \sqrt{\gamma})$ a donc pour expression sur S_k :

$$(IV.40) \quad \partial_x(\Theta_A^z \sqrt{\gamma}) = \frac{1}{c} \frac{d}{dt} (\Theta_A^i \sqrt{\gamma}) - \partial_A(l \sqrt{\gamma}).$$

(IV.37) s'écrit alors, compte tenu de (IV.39) et (IV.40) :

$$(IV.41) \quad \int_{S_k} \frac{d}{dt} (\Theta_A^i \sqrt{\gamma}) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 - \int_{S_k} \partial_A(l \sqrt{\gamma}) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \\ = \frac{c}{2} \int_{S_k} \Theta^{\alpha\sigma} \sqrt{\gamma} \partial_A \gamma_{\alpha\sigma} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$$

or, d'après la formule d'Ostrogradski :

$$\int_{S_k} \partial_A(l \sqrt{\gamma}) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \equiv \int_{\partial S_k} l \sqrt{\gamma} \frac{\bar{\gamma}_{i_1 i_2}}{2!} \frac{D(x^{i_1}, x^{i_2})}{D(t_1, t_2)} dt_1 \wedge dt_2,$$

$\bar{\gamma}_{i_1 i_2}$ étant le tenseur élément de volume de W_3 , et ∂S_k une variété à deux dimensions rapportée aux variables t_1, t_2 . D'après l'étude du problème de Cauchy et les conditions de raccordement du paragraphe 13, l est nul sur ∂S_k , donc l'intégrale considérée est nulle.

De plus, d'après l'étude du problème de Cauchy du paragraphe 10, Θ_A^i est continu ainsi que ses dérivées partielles premières, ce qui entraîne

$$\int_{S_k} \frac{d}{dt} (\Theta_A^i \sqrt{\gamma}) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \equiv \frac{d}{dt} \int_{S_k} \Theta_A^i \sqrt{\gamma} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3.$$

D'après les remarques faites, les équations de mouvement (IV.41) s'écrivent ⁽¹⁾

$$(IV.42) \quad \frac{d}{dt} \int_{S_k} \Theta_A^i \sqrt{\gamma} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 = \frac{c}{2} \int_{S_k} \Theta^{\alpha\sigma} \partial_A \gamma_{\alpha\sigma} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3.$$

Comme nous l'avons remarqué plus haut, le premier membre est le même dans le schéma matière pure ou dans le schéma fluide parfait.

Le deuxième membre est bien entendu différent selon qu'on se place dans l'un ou l'autre des deux schémas.

(1) C'est la forme obtenue par F. Hennequin pour les équations de mouvement dans le schéma matière pure ([27], p. 66).

Écrivons alors en première approximation les équations de mouvement (IV.42). D'après (III.17) et (III.24), nous obtenons :

$$\Theta_{\lambda}^{\lambda} = -8\pi G \rho \frac{\dot{x}^{\lambda}}{c^2} + O\left(\frac{1}{c^3}\right),$$

$$\frac{c}{2} \Theta^{\alpha\sigma} \partial_{\lambda} \gamma_{\alpha\sigma} = \frac{8\pi}{c^3} \left[-\frac{1}{6} \left(\frac{\mu^2}{2\rho} + G\rho \right) \partial_{\lambda} (2U + W) - G\rho \partial_{\lambda} U + \sqrt{G} \mu \partial_{\lambda} V \right] + O\left(\frac{1}{c^3}\right).$$

Si S_k a pour masse m_k et si $\dot{x}_k^{\lambda}$ désigne à l'instant t la valeur de $\frac{dx^{\lambda}}{dt}$ sur S_k , les équations de mouvement de S_k (IV.42) s'écrivent

$$(IV.43) \quad Gm_k \frac{d}{dt} \dot{x}_k^{\lambda} = \int_{S_k} \left[\frac{1}{6} \left(\frac{\mu^2}{2\rho} + G\rho \right) \partial_{\lambda} (2U + W) + G\rho \partial_{\lambda} U - \sqrt{G} \mu \partial_{\lambda} V \right] dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 + O\left(\frac{1}{c^2}\right).$$

Poursuivons les calculs, dans le cas particulier suivant :

α . les N domaines S_s ($s = 1, 2, \dots, N$) présentent la symétrie sphérique ;

β . les dimensions des domaines S_s sont petites vis-à-vis de leurs distances mutuelles.

Désignons par ξ_s^{λ} les coordonnées du centre de gravité G_s de S_s et par R le rayon de S_k .

Posons

$$r_{qk} = \sqrt{(\xi_k^1 - \xi_q^1)^2 + (\xi_k^2 - \xi_q^2)^2 + (\xi_k^3 - \xi_q^3)^2}.$$

Si d représente le minimum de r_{qk} lorsque q prend les $N-1$ valeurs distinctes de k , la deuxième hypothèse entraîne que $\frac{R}{d}$ est très petit et pourra être négligé dans la pratique.

Les densités ρ et μ dépendent du temps et de la distance r_k de G_k à un point variable appartenant à S_k . U_k est fonction de r_k et du temps :

$$(IV.44) \quad \int_{S_k} \rho \partial_{\lambda} U_k dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 = \int \rho \frac{\partial U_k}{\partial r_k} \frac{x^{\lambda} - \xi_k^{\lambda}}{r_k} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 = 0.$$

En appliquant la formule des accroissements finis à $\partial_{\lambda} U_q$, on obtient

$$\int_{S_k} \rho \partial_{\lambda} U_q dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$$

$$\equiv m_k \tilde{\partial}_{\lambda} U_q + \int_{S_k} \rho (x^{\beta} - \xi_k^{\beta}) [\partial_{\beta\lambda} U_q]_{x_k^{\beta}} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3,$$

$\partial_{AB} U_q$ est prise en un point de S_k de coordonnées

$$X_k^M = \xi_k^M + \theta (x^M - \xi_k^M), \quad \text{avec } 0 < \theta < 1.$$

Or, en calculant $\partial_{AB} U_q$, on obtient

$$\begin{aligned} & \int_{S_k} \rho (x^B - \xi_k^B) [\partial_{AB} U_q]_{X_k^M} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \\ & \equiv \int_{S_k} \rho \left\{ 2 \sum_B (x^B - \xi_k^B) \left[\frac{G m_q}{r_q^3} \frac{x^B - \xi_q^B}{r_q} \frac{x^A - \xi_q^A}{r_q} \right] - (x^A - \xi_k^A) \left[\frac{G m_q}{r_q^3} \right]_{X_k^M} \right. \\ & \quad \left. + \sum_B (x^B - \xi_k^B) \left[\frac{G m_q}{r_q^3} \frac{x^A - \xi_q^A}{r_q} \frac{x^B - \xi_q^B}{r_q} \right]_{X_k^M} \right\} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3. \end{aligned}$$

Cette intégrale est bornée en valeur absolue par $\frac{4 m_k G m_q R}{d^3 \left(1 - \frac{R}{d}\right)}$. On peut écrire

$$(IV.45) \quad \int_{S_k} \rho (x^B - \xi_k^B) [\partial_{AB} U_q]_{X_k^M} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 = f \left(\frac{R}{d} \right),$$

où $f \left(\frac{R}{d} \right)$ est une fonction de $\frac{R}{d}$ qui tend vers zéro avec $\frac{R}{d}$.

En faisant d'autres remarques analogues à (IV.44) et (IV.45), et en notant que $\dot{x}_k^A = \dot{\xi}_k^A$, les équations de mouvement (IV.43) peuvent s'écrire en utilisant aussi (III.25) :

$$\begin{aligned} (IV.46) \quad G m_k \ddot{\xi}_k^A &= \sum_{q \neq k} \tilde{\partial}_\lambda \left[\frac{1}{3} \left(\int_{S_k} \frac{u^2}{2\rho} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 + G m_k \right) \right. \\ & \quad \times \left(G m_q + \int_{S_q} \frac{u^2}{2\rho} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \right) \frac{1}{r_q} \\ & \quad \left. + G m_k \frac{G m_q}{r_q} - \frac{G e_k e_q}{r_q} \right] \\ & \quad + f \left(\frac{R}{d} \right) + O \left(\frac{1}{d^2} \right). \end{aligned}$$

Dans le cas limite où les N domaines S_s se réduisent à N particules matérielles ponctuelles G_s à symétrie sphérique de masses m_s et charges e_s ($s = 1, \dots, N$), les équations (IV.46) s'écrivent

$$\begin{aligned} (IV.47) \quad G m_k \ddot{\xi}_k^A &= \sum_{q \neq k} \tilde{\partial}_\lambda \left[\frac{1}{3} \left(\frac{e_k^2}{2m_k} + G m_k \right) \left(\frac{e_q^2}{2m_q} + G m_q \right) \frac{1}{r_q} \right. \\ & \quad \left. + \frac{G m_k G m_q}{r_q} - \frac{G e_k e_q}{r_q} \right] + O \left(\frac{1}{d^2} \right). \end{aligned}$$

Il faut ajouter les équations (IV.32) et (IV.36).

Nous retrouvons donc les mêmes équations de mouvement que par la méthode des singularités [cf. (IV. 24) et (IV. 25)].

31. Interprétation de V_4 comme variété espace-temps de la relativité générale. — Nous avons montré qu'il intervient dans les équations de mouvement, en première approximation, un terme supplémentaire qui n'apparaît pas dans les équations de mouvement classiques.

Or, pour interpréter, en première approximation, la variété V_4 comme cadre géométrique de la relativité générale, F. Hennequin avait muni V_4 de la métrique ξds^2 . Nous vérifions facilement qu'en première approximation les valeurs de r et ν_0 données par (III. 14) sont indépendantes de la métrique conforme à ds^2 choisie; les tableaux (III. 17) et (III. 24) de $\Theta^{\alpha\beta}$ et $\gamma_{\alpha\beta}$ n'en dépendent pas non plus. Nous pouvons donc conclure que *les équations de mouvement, en première approximation, ne sont pas influencées par le choix de la métrique conforme à ds^2 dans V_4 .*

D'autre part, nous avons été guidé, dans l'interprétation physique de la théorie de Jordan-Thiry, par le désir d'interpréter V_4 comme variété espace-temps de la relativité générale, ceci a permis en particulier de déterminer le tenseur impulsion-énergie de V_5 .

Avant de poursuivre, rappelons quelques notations. V_5 est munie de la métrique $d\sigma^2 = \gamma_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$, V_4 de la métrique $ds^2 = \check{g}_{ij} dx^i dx^j$, où

$$\check{g}_{ij} = \lambda g_{ij} = \lambda \left(\gamma_{ij} - \frac{\gamma_{0i} \gamma_{0j}}{\gamma_{00}} \right).$$

Étant donné le résultat physiquement inacceptable obtenu pour les équations de mouvement, en première approximation, il semble normal de chercher s'il existe une métrique conforme à ds^2 telle que V_4 puisse être interprétée, en première et en deuxième approximation, comme cadre géométrique de la relativité générale.

Pour cela, il suffira d'imposer, en première et en deuxième approximation, l'une des deux hypothèses suivantes : ou bien les $\check{g}_{ij}$ sont les potentiels de la relativité générale, ou bien les équations de champ de V_5 entraînent dans V_4 les équations de champ de la relativité générale. Nous montrerons qu'il est impossible de trouver λ satisfaisant à cette condition : pour cela, il suffira de montrer l'impossibilité dans le cas de matière non chargée, c'est-à-dire pour $\mu = 0$.

Nous supposons dans toute la suite de ce paragraphe que $\underline{\mu = 0}$. Nous pouvons poser

$$(IV.48) \quad \lambda - \xi = \frac{\Lambda_0}{c^2} + \frac{\Lambda_1}{c^4} + O\left(\frac{1}{c^6}\right).$$

Comme nous l'avons déjà fait remarquer plus haut, les équations de champ de V_3 déterminent en première approximation le tenseur fondamental $\gamma_{\alpha\beta}$ par le tableau (III.24). Nous trouvons alors en première approximation pour $\hat{g}_{ij}$:

$$(IV.49) \quad \begin{cases} \hat{g}_{AB} = -\delta_A^B - \frac{\delta_A^B}{c^2} (2U + \Lambda_0) + O\left(\frac{1}{c^4}\right), \\ \hat{g}_{44} = 1 + (\Lambda_0 - 2U) \frac{1}{c^2} + O\left(\frac{1}{c^4}\right), \\ \hat{g}_{4A} = \frac{4Q_A}{c^3} + O\left(\frac{1}{c^5}\right). \end{cases}$$

Donc, si nous voulons que dans le cas matière non chargée, $d\hat{s}^2$ représente en première approximation la métrique de la relativité générale, il est nécessaire et suffisant que $\Lambda_0 = 0$ ⁽¹⁾. Donc

$$(IV.50) \quad \lambda = \xi + O\left(\frac{1}{c^4}\right).$$

Or, d'après (III.24) :

$$(IV.51) \quad \xi = 1 + \frac{2U}{3c^2} + O\left(\frac{1}{c^4}\right).$$

Maintenant, nous voulons imposer que les équations de champ de V_3 entraînent dans V_4 celles de la relativité générale, en deuxième approximation.

D'après (I.14), (I.15) et (II.4), les équations de champ, $S_{\alpha\beta} = \Theta_{\alpha\beta}$, s'écrivent dans V_4 , pour $\alpha = i$ et $\beta = j$:

$$(IV.52) \quad \hat{S}_{ij} + \frac{3}{4} g_{ij} g^{pq} \frac{\partial_p \lambda}{\lambda} \frac{\partial_q \lambda}{\lambda} - \frac{3}{2} \frac{\partial_i \lambda}{\lambda} \frac{\partial_j \lambda}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} [\nabla_i \partial_j \lambda - g_{ij} \Delta \lambda] \\ = \frac{1}{\xi} [\nabla_i \partial_j \xi - g_{ij} \Delta \xi] - \frac{8\pi G}{c^2} \xi_{ij} - g_{im} g_{mj} \Theta^{mn}.$$

(1) Pour le calcul du tenseur fondamental en première approximation, en relativité générale, on peut consulter par exemple : [23], p. 49. Ce résultat énoncé en première approximation, a été mis en évidence par F. Hennequin ([27], p. 76).

Étant donnée l'interprétation de $\frac{\Theta^{mn}}{\chi^2_{\xi^2}}$ comme tenseur impulsion-énergie de la relativité générale, nous devons donc imposer, en deuxième approximation, la condition

$$(IV.53) \quad \frac{3}{4} g_{ij} g^{pq} \frac{\partial_p \lambda}{\lambda} \frac{\partial_j \lambda}{\lambda} - \frac{3}{2} \frac{\partial_i \lambda}{\lambda} \frac{\partial_j \lambda}{\lambda} \\ + \frac{1}{\lambda} [\nabla_i \partial_j \lambda - g_{ij} \Delta \lambda] - \frac{1}{\xi} [\nabla_i \partial_j \xi - g_{ij} \Delta \xi] - \frac{8\pi G}{c^2} \tau_{ij} = 0.$$

Bien entendu, (IV.52) est vérifiée en première approximation, d'après (IV.50), puisque les potentiels g_{ij}^* de V_4 sont en première approximation ceux de la relativité générale.

Si nous posons $\alpha = \frac{2U}{3}$, d'après (IV.48) et (III.24), les conditions (IV.53) entraînent en deuxième approximation :

pour $i = 4$ et $j = 4$:

$$(IV.54) \quad \sum_B \partial_{BB} \Lambda_1 = \frac{3}{4} \sum_B \partial_B \alpha \partial_B \alpha;$$

pour $i = 4$ et $j = A$:

$$(IV.55) \quad \frac{3}{2} \partial_t \alpha \partial_A \alpha - \partial_{tA} \Lambda_1 = 0;$$

pour $i = A$ et $j = B$:

$$(IV.56) \quad \partial_A^B \sum_C \partial_{CC} \Lambda_1 - \partial_{AB} \Lambda_1 - \frac{3}{4} \partial_A^B \sum_C \partial_C \alpha \partial_C \alpha + \frac{3}{2} \partial_A \alpha \partial_B \alpha = 0.$$

Or, (IV.56) entraîne

$$(IV.57) \quad \frac{2}{3} \sum_C \partial_{CC} \Lambda_1 = \frac{3}{4} \sum_C \partial_C \alpha \partial_C \alpha.$$

Cette dernière relation entraîne, compte tenu de (IV.54) :

$$\sum_B \partial_B \alpha \partial_B \alpha = 0.$$

Nous en déduisons que α est constant, ce qui est en contradiction avec $\alpha = \frac{2U}{3}$. Quel que soit le choix de λ , la variété V_4 , munie de la

métrique $d\tilde{s}^2$, ne peut être identifiée au cadre de la relativité générale (l'impossibilité a été établie en l'absence de charge et en deuxième approximation).

D'après ce résultat, il n'était pas possible de prévoir que nous retrouverions les équations de mouvement classiques en première approximation, par la méthode des singularités (méthode qui fait intervenir en première approximation le tenseur d'Einstein de V_0 en deuxième approximation). Cependant, malgré cette remarque, il eut été possible de retrouver les équations de mouvement classiques.

Il semble, d'après les résultats obtenus dans ce paragraphe, qu'il faille modifier les hypothèses faites sur V_0 et, peut-être, transformer les équations de champ de la théorie de Jordan-Thiry.

Dans des travaux récents, Leutwyler [31] et P. Pigeaud [33] ont modifié la théorie de Jordan-Thiry et utilisé des méthodes très différentes.

DEUXIÈME PARTIE.

THÉORIE DE KALUZA-KLEIN.

CHAPITRE V.

THÉORIE DE KALUZA-KLEIN. ÉQUATIONS DE CHAMP.

ÉQUATIONS DE MOUVEMENT.

32. Théorie de Kaluza-Klein. — Le cadre géométrique est celui de la théorie de Jordan-Thiry, avec $\xi = 1$. Donc $\gamma_{00} = -1$.

Les équations de champ sont obtenues par une méthode variationnelle, en annulant la variation de l'intégrale

$$I = \int_C R_{\alpha\beta} \gamma^{\alpha\beta} \sqrt{|\gamma|} dx^0 \wedge \dots \wedge dx^4,$$

C est une chaîne différentiable de V_5 dont le bord est ∂C . Les variations des potentiels et de leurs dérivées premières s'annulent sur ∂C :

$$\begin{aligned} \delta I &= \int_C (\delta R_{\alpha\beta}) \gamma^{\alpha\beta} \sqrt{|\gamma|} dx^0 \wedge \dots \wedge dx^4 \\ &\quad + \int_C R_{\alpha\beta} \delta(\gamma^{\alpha\beta} \sqrt{|\gamma|}) dx^0 \wedge \dots \wedge dx^4, \end{aligned}$$

Or

$$\gamma^{\alpha\beta} \delta R_{\alpha\beta} \equiv D_\lambda [\gamma^{\alpha\beta} \delta \Gamma_{\alpha\beta}^\lambda - \gamma^{\alpha\lambda} \delta \Gamma_{\alpha\beta}^\beta],$$

il vient donc

$$\begin{aligned} \delta I &= \int_C D_\lambda [\gamma^{\alpha\beta} \delta \Gamma_{\alpha\beta}^\lambda - \gamma^{\alpha\lambda} \delta \Gamma_{\alpha\beta}^\beta] \sqrt{|\gamma|} dx^0 \wedge \dots \wedge dx^4 \\ &\quad + \int_C R_{\alpha\beta} \delta(\gamma^{\alpha\beta} \sqrt{|\gamma|}) dx^0 \wedge \dots \wedge dx^4, \end{aligned}$$

$\delta \Gamma_{\alpha\beta}^\lambda$ s'annule sur ∂C . Donc, d'après la formule de Stokes, la première intégrale est nulle. Il vient

$$\delta I = \int_C S_{\alpha\beta} \delta \gamma^{\alpha\beta} \sqrt{|\gamma|} dx^0 \wedge \dots \wedge dx^4 = - \int_C S^{\alpha\beta} \delta \gamma_{\alpha\beta} \sqrt{|\gamma|} dx^0 \wedge \dots \wedge dx^4$$

ou encore

$$\delta I = - \int_C S^{ij} \delta \gamma_{ij} \sqrt{|\gamma|} dx^0 \wedge \dots \wedge dx^4 - 2 \int_C S^{i0} \delta \gamma_{i0} \sqrt{|\gamma|} dx^0 \wedge \dots \wedge dx^4.$$

Les équations de champ du cas extérieur s'écrivent alors

$$S^{xi} = 0.$$

D'après (II.3), ce système est équivalent en repères adaptés orthonormés au système

$$S_{\underline{x}\underline{t}} = 0.$$

Ce sont les 14 premières équations de la théorie de Jordan-Thiry avec $\xi = 1$, la 15^e équation, $S_{00} = 0$, étant supprimée.

D'après (I.13), ce sont aussi les équations de la théorie provisoire de l'électromagnétisme, dans le schéma champ électromagnétique pur.

Les équations de champ du cas intérieur, schéma fluide parfait, sont

$$(V.1) \quad S^{xi} = \Theta^{xi},$$

où Θ^{xi} est défini par (II.6) et le système (II.8) dans lequel nous faisons $\xi = 1$.

Ce système est équivalent, en repères adaptés orthonormés aux 14 équations suivantes de la théorie de Jordan-Thiry:

$$S_{\underline{x}\underline{t}} = \Theta_{\underline{x}\underline{t}}, \quad \text{avec } \xi = 1.$$

D'après (I.9) et (I.10), les équations de champ (V.1) sont les équations de la théorie provisoire de l'électromagnétisme, schéma fluide parfait. Si le fluide parfait admet une équation d'état, les relations (II.10) et (II.8), dans lesquelles $\xi = 1$, entraînent que r est une fonction de l . C'est donc un fluide holonome.

33. Conditions de conservation. — Les conditions de conservation sont les conditions satisfaites par Θ^{xi} , conséquences des identités de conservation, $D_\alpha S^{\alpha\beta} \equiv 0$.

Démontrons que les conditions de conservation sont en repères adaptés celles de la théorie de Jordan-Thiry, avec $\xi = 1$. L'expression de $D_\alpha S^{\alpha\beta}$ est en repères adaptés :

$$(V.2) \quad D_\alpha S^{\alpha\beta} \equiv \partial_j S^j{}^\beta + \Gamma_{\alpha j}^\alpha S^j{}^\beta + 2\Gamma_{\alpha j}^\beta S^{\alpha j}.$$

Donc, en réalité $D_\alpha S^{\alpha\beta}$ ne fait pas intervenir S^{00} .

Ce résultat est évidemment vrai pour un tenseur autre que $S^{\alpha\beta}$. Les équations de champ et les identités de conservation entraînent donc, en repères adaptés :

$$(V.3) \quad D_\alpha \Theta^{\alpha\beta} = 0.$$

Les conditions de conservation de la théorie de Kaluza-Klein sont donc celles de la théorie de Jordan-Thiry dans lesquelles nous faisons $\xi = 1$.

Dans le schéma fluide parfait, elles se traduisent par le système (II. 15), avec $\xi = 1$.

Signalons que la première équation (II. 15) admet une intégrale première, lorsque le fluide parfait admet une équation d'état $r = f(l)$:

$$v_0 = k e^{-\int \frac{\xi}{f(l)} dl},$$

où k est une constante.

L'étude du problème de Cauchy et ses conséquences dans le schéma fluide parfait sont formellement identiques à l'étude effectuée en théorie de Jordan-Thiry (*cf.* chap. II) et aux conséquences qu'on peut en déduire.

Il suffit de poser $\xi = 1$ dans les résultats obtenus.

34. Solution globale des équations approchées de champ, en coordonnées isothermes. Rôle des conditions d'isothermie. — Les hypothèses sur le tenseur métrique, et la méthode pour résoudre les équations approchées de champ, en coordonnées isothermes, sont celles de la théorie de Jordan-Thiry (*cf.* § 17 et 18). Les seules différences sont que $\xi = 1$, et que l'équation de champ $S_{(t)}^{00} = \Theta^{00}$ est supprimée.

Nous devons revoir le rôle des conditions d'isothermie dans ces approximations, puisque les équations de champ ne sont plus celles de la théorie de Jordan-Thiry.

Les équations de champ s'écrivent en coordonnées isothermes

$$(V.4) \quad S_{(t)}^{\alpha i} = \Theta^{\alpha i}.$$

Rappelons les relations du paragraphe 18 :

$$(V.5) \quad S_{(l)}^{\alpha\beta} \equiv S^{\alpha\beta} + \Lambda^{\alpha\beta},$$

$$(V.6) \quad \Lambda^{\alpha\beta} \equiv \frac{1}{2} \left[\gamma^{\alpha\rho} \partial_\rho F^\beta + \gamma^{\beta\rho} \partial_\rho F^\alpha - F^\rho \partial_\rho \gamma^{\alpha\beta} - \gamma^{\alpha\beta} (\partial_\rho F^\rho + \Gamma_{\rho\lambda}^\lambda F^\rho) \right],$$

$$(V.7) \quad D_\alpha \Lambda^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left[\gamma^{\lambda\mu} \partial_{\lambda\mu} F^\beta + 2 \gamma^{\lambda\mu} \Gamma_{\rho\mu}^\beta \partial_\lambda F^\rho - F^\rho \partial_\rho \gamma^{\lambda\mu} \Gamma_{\lambda\mu}^\beta \right].$$

Les équations approchées de champ en coordonnées isothermes (V.4) et les équations approchées de mouvement étant supposées satisfaites, quelles en sont les conséquences ?

Les équations de mouvement (V.3) et les identités de conservation entraînent

$$D_\alpha (S^{\alpha\beta} - \Theta^{\alpha\beta}) = 0,$$

ce qui peut s'écrire

$$\partial_j (S^{j\beta} - \Theta^{j\beta}) + \Gamma_{\alpha j}^\alpha (S^{j\beta} - \Theta^{j\beta}) + 2 \Gamma_{\alpha j}^\beta S^{\alpha j} = 0$$

ou encore, d'après (V.4) et (V.5) :

$$\partial_j \Lambda^{j\beta} + \Gamma_{\alpha j}^\alpha \Lambda^{j\beta} + 2 \Gamma_{\alpha j}^\beta \Lambda^{\alpha j} = 0$$

ou encore

$$(V.8) \quad D_\alpha \Lambda^{\alpha\beta} = 0.$$

De (V.8), nous déduisons à chaque ordre d'approximation :

$$\Delta F_{(2l+1)}^0 = \varphi^0 [F_{(2l'-1)}^0, F_{(2l'-1)}^k, F_{(2l'-2)}^M],$$

$$\Delta F_{(2l+1)}^k = \varphi^k [F_{(2l'-1)}^0, F_{(2l'-1)}^k, F_{(2l'-2)}^M],$$

$$\Delta F_{(2l)}^A = \varphi^A [F_{(2l'-1)}^0, F_{(2l'-1)}^0, F_{(2l'-2)}^M],$$

où φ^α est un polynôme homogène linéaire par rapport à $F_{(2l'-1)}^0$, $F_{(2l'-1)}^k$, $F_{(2l'-2)}^M$ et leurs dérivées premières, avec $l' \leq l$.

Nous obtenons donc en première approximation :

$$(V.9) \quad \begin{cases} \Delta F_{(3)}^0 = 0, \\ \Delta F_{(3)}^k = 0, \\ \Delta F_{(2)}^A = 0. \end{cases}$$

Le champ étant quasi galiléen, (V.9) entraîne en première approximation :

$$F_{(4)}^0 = 0,$$

$$F_{(3)}^1 = 0,$$

$$F_{(2)}^2 = 0.$$

Par un raisonnement par approximations successives, nous pouvons conclure que les conditions d'isothermie sont satisfaites à chaque ordre d'approximation.

Nous obtenons donc le même résultat qu'en théorie de Jordan-Thiry :

Pour une solution approchée des équations de champ (cas intérieur et extérieur) en coordonnées isothermes, les équations approchées de mouvement d'ordre l entraînent la vérification des conditions approchées d'isothermie d'ordre l .

De (V.6), il résulte qu'à l'approximation d'ordre l , $\Lambda_{(l)}^{\alpha\beta}$ a pour expression

$$\Lambda_{(l)}^{\alpha\beta} = \varphi^{\alpha\beta}(F_{(m)}^{\rho}),$$

où $\varphi^{\alpha\beta}$ est un polynôme homogène linéaire par rapport aux $F_{(m)}^{\rho}$ et à leurs dérivées premières, avec $m \leq l$.

Ce dernier résultat et l'unicité physique de la solution des équations de champ entraînent la proposition suivante :

Toutes les solutions approchées des équations de champ en coordonnées quelconques se déduisent tensoriellement de la solution approchée des équations de champ en coordonnées isothermes.

35. Solution des équations approchées de champ du cas extérieur et des conditions approchées d'isothermie. Résultats en première approximation. — Comme en théorie de Jordan-Thiry (§ 19), les résultats du paragraphe précédent et les travaux de relativité générale [12] nous conduisent à la recherche d'une solution des équations approchées de champ du cas extérieur, solution satisfaisant les conditions approchées d'isothermie.

Nous supposons aussi que le champ extérieur possède N singularités ponctuelles à symétrie sphérique. La méthode de résolution est la même qu'en théorie de Jordan-Thiry : il suffit de faire $\xi = 1$ et de supprimer l'équation $S^{00} = \Theta^{00}$.

Les calculs en première approximation sont détaillés dans le paragraphe 23, avec les différences que nous venons de signaler.

Il nous semble inutile de les reprendre et donnons seulement les résultats, c'est-à-dire les tableaux déterminant le tenseur métrique par ses composantes covariantes $\gamma_{\alpha\beta}$ et ses composantes contravariantes $\gamma^{\alpha\beta}$, ainsi que la densité tensorielle de composantes $\Gamma^{\alpha\beta}$:

$$(V.10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \gamma_{00} = -1, \\ \gamma_{0A} = \frac{\alpha_{0A}}{c^3} + O\left(\frac{1}{c^4}\right), \\ \gamma_{04} = \frac{2V}{c^2} + O\left(\frac{1}{c^4}\right), \\ \gamma_{A4} = \frac{\alpha_{A4}}{c^3} + O\left(\frac{1}{c^5}\right), \\ \gamma_{44} = 1 - \frac{2U}{c^2} + O\left(\frac{1}{c^4}\right), \\ \gamma_{AB} = -\delta_{AB} - \delta_A^B \frac{2U}{c^2} + O\left(\frac{1}{c^4}\right); \end{array} \right.$$

$$(V.11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \gamma^{00} = -1 + O\left(\frac{1}{c^4}\right), \\ \gamma^{0A} = -\frac{\alpha_{0A}}{c^3} + O\left(\frac{1}{c^5}\right), \\ \gamma^{04} = \frac{2V}{c^2} + O\left(\frac{1}{c^4}\right), \\ \gamma^{A4} = \frac{\alpha_{A4}}{c^3} + O\left(\frac{1}{c^5}\right), \\ \gamma^{44} = 1 + \frac{2U}{c^2} + O\left(\frac{1}{c^4}\right); \\ \gamma^{AB} = -\delta_{AB} + \frac{2U}{c^2} \delta_A^B + O\left(\frac{1}{c^4}\right), \end{array} \right.$$

$$(V.12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Gamma^{00} = -1 - \frac{2U}{c^2} + O\left(\frac{1}{c^4}\right), \\ \Gamma^{0A} = -\frac{\alpha_{0A}}{c^3} + O\left(\frac{1}{c^5}\right), \\ \Gamma^{04} = \frac{2V}{c^2} + O\left(\frac{1}{c^4}\right), \\ \Gamma^{A4} = \frac{\alpha_{A4}}{c^3} + O\left(\frac{1}{c^5}\right), \\ \Gamma^{44} = 1 + \frac{4U}{c^2} + O\left(\frac{1}{c^4}\right), \\ \Gamma^{AB} = -\delta_{AB} + O\left(\frac{1}{c^4}\right). \end{array} \right.$$

Nous avons posé

$$\alpha_{0A} = -2\sqrt{G} \sum_{s=1}^N \frac{e'_s}{r_s} \xi_s^A,$$

$$\alpha_{1A} = 4G \sum_{s=1}^N \frac{m_s}{r_s} \xi_s^A,$$

$$U = \sum_{s=1}^N \frac{G m_s}{r_s},$$

$$V = \sum_{s=1}^N \frac{\sqrt{G} e_s}{r_s}.$$

Nous vérifions, en utilisant les résultats du paragraphe 22, que la résolution des équations de champ (cas extérieur et intérieur) conduit aux mêmes résultats, en première approximation, lorsque les N domaines intérieurs présentent la symétrie sphérique dans W_3 .

36. Équations de mouvement obtenues par la méthode des singularités. Résultats en première approximation. — A. MÉTHODE DES SINGULARITÉS. — Nous allons montrer que la méthode des singularités, établie en théorie de Jordan-Thiry, se traduit immédiatement en théorie de Kaluza-Klein.

Les hypothèses sur la variété riemannienne V_5 sont celles que nous avons formulées dans le paragraphe 24, lorsque $n = 4$.

A l'extérieur de N domaines de V_5 appelés domaines de singularités, la métrique $d\sigma^2 = \gamma_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$ est régulière et satisfait les équations de champ du cas extérieur.

Les singularités sont représentées dans W_3 par N domaines appelés domaines de singularités de W_3 . Soit Γ un tel domaine de W_3 , de bord $\partial\Gamma$, que nous supposons être une variété bornée à deux dimensions.

Nous désignerons par C un domaine quelconque de W_3 , satisfaisant les conditions suivantes : C contient un seul domaine de singularité Γ , et admet un bord ∂C qui est une variété à deux dimensions. De plus $C - \Gamma$ est borné.

Le tenseur $S^{\alpha A}$ induit sur W_3 , pour α fixé, un vecteur $\vec{S}^{(\alpha)}$. σ^α est le flux de $\vec{S}^{(\alpha)}$ à travers ∂C ,

$$E^{(\alpha)} \equiv \bar{\nabla}_A S^{(\alpha)A} \equiv \operatorname{div} \vec{S}^{(\alpha)}.$$

Comme en théorie de Jordan-Thiry, nous avons les deux théorèmes suivants dont les démonstrations sont identiques :

a. Une condition nécessaire et suffisante pour que σ^z soit nulle quel que soit C extérieur au domaine considéré est que

$$\operatorname{div} \vec{S}^{(z)} \equiv E^{(z)} = 0.$$

b. Une condition nécessaire et suffisante pour que σ^z soit indépendant de ∂C est que $E^{(z)}$ soit nul à l'extérieur du domaine de singularités considéré.

Nous avons alors les propriétés suivantes :

PREMIÈRE PROPRIÉTÉ. — Si $S_{(l)}^{z_l} = 0$ ($l \leq p-1$), à l'extérieur de C, on conclut que $E_{(p)}^z = 0$, donc que $\sigma_{(p)}^z$ est indépendant du domaine C considéré.

[La démonstration est analogue à celle faite en théorie de Jordan-Thiry (§ 24), puisque, d'après (V.2), $D_\alpha S^{z\beta}$ ne fait pas intervenir S^{00} .]

DEUXIÈME PROPRIÉTÉ. — $\sigma_{(p)}^z$ ne dépend que des potentiels d'ordre au plus égal à $p-1$.

(La démonstration a été faite au paragraphe 24.)

CONCLUSION. — Supposons que les équations de champ du cas extérieur soient satisfaites jusqu'à l'ordre $(p-1)$ compris, c'est-à-dire

$$S_{(l)}^{z\beta} = 0 \quad (l \leq p-1).$$

Les conditions

$$\sum_{l \leq p} \frac{\sigma_{(l)}^\alpha}{r^l} + O\left(\frac{1}{r^{p+2}}\right) = 0$$

s'expriment en fonction des potentiels d'ordre au plus égal à $p-1$. Nous pouvons donc espérer que $\sigma_{(p)}^\alpha$ n'est pas identiquement nul.

S'il en est ainsi, d'après la première propriété, nous dirons que les équations

$$\sum_{l \leq p} \frac{\sigma_{(l)}^\alpha}{c^l} + O\left(\frac{1}{c^{p+2}}\right) = 0$$

sont à l'ordre p les équations de mouvement relatives au domaine de singularités Γ .

B. DÉTERMINATION EFFECTIVE DES ÉQUATIONS DE MOUVEMENT EN PREMIÈRE APPROXIMATION. — Appliquons la méthode des singularités lorsque le champ extérieur possède dans W_3 N singularités ponctuelles G_s , à symétrie sphérique et satisfait les conditions d'isothermie. Le tenseur métrique et les densités tensorielles sont alors déterminés par (V. 10), (V. 11) et (V. 12).

Nous avons vu au paragraphe 35 qu'en première approximation, le champ extérieur peut être supposé produit par N domaines à symétrie sphérique, ayant pour centres les N singularités; si le rayon de chaque domaine est arbitrairement petit, les N domaines recevront l'interprétation de N particules matérielles, de masses m_s et de charges e_s ($s = 1, 2, \dots, N$).

Cherchons les équations de mouvement relatives à la $k^{\text{ième}}$ singularité G_k .

W_3 est toujours supposée homéomorphe à l'espace euclidien E_3 . Désignons par ξ_k^M les coordonnées de G_k et x^M celles du point courant de W_3 , relativement à E_3 . D'après la première propriété, les équations de mouvement sont indépendantes en première approximation du domaine C_k entourant G_k : nous pouvons choisir pour C_k , une sphère de centre G_k dont nous ferons tendre le rayon vers zéro.

Si p désigne l'ordre de la première approximation, d'après (VI. 7), les équations s'écrivent comme en théorie de Jordan-Thiry :

$$\sigma_{(p)}^\alpha = \int_{\partial C_k} S_{(p)}^{\alpha M} \frac{x^M - \xi_k^M}{r_k} r_k^2 \sin \theta \, d\varphi,$$

r_k , θ , φ sont les coordonnées polaires de pôle G_k . C_k désigne une boule de l'espace euclidien E_3 , de centre G_k ayant pour coordonnées (ξ_k^M) .

En utilisant les résultats obtenus en théorie de Jordan-Thiry (§ 29) et en modifiant la solution des équations de champ (cf. § 35), nous

obtenons les équations de mouvement de l'électromagnétisme classique :

$$(V.13) \quad \left\{ \begin{array}{l} -m_k \ddot{\xi}_k^\Lambda + m_k \sum_{q \neq k} \tilde{\partial}_\Lambda \frac{G m_q}{r_q} - e_k \sum_{q \neq k} \tilde{\partial}_\Lambda \frac{e_q}{r_q} = O\left(\frac{1}{c^2}\right), \\ \dot{m}_k = 0, \\ \dot{e}_k = 0. \end{array} \right.$$

37. Équations de mouvement par la méthode du tenseur impulsion-énergie. Résultats en première approximation. — Comme en théorie de Jordan-Thiry, nous supposons qu'une région de la variété V_3 est balayée par une distribution finie de masses et de charges, cette région étant représentée dans une section d'espace W_3 par N domaines S_s ($s = 1, \dots, N$). Dans cette région, les équations de champ sont celles du cas intérieur, dans le schéma fluide parfait. Le champ est supposé quasi galiléen, à comportement asymptotique euclidien. De plus, nous supposons qu'il est possible de définir pour chaque domaine S_s de W_3 une vitesse moyenne de translation, cette vitesse étant petite devant la vitesse de la lumière c .

Les équations de mouvement se déduisent des conditions de conservation qui, nous l'avons vu, sont celles de la théorie de Jordan-Thiry, avec $\xi = 1$.

Donc, tous les résultats obtenus en théorie de Jordan-Thiry (§ 30) sont encore valables, avec la modification signalée pour ξ .

En première approximation, les équations de mouvement sont celles obtenues par la méthode des singularités : elles coïncident avec les équations de l'électromagnétisme classique.

CHAPITRE VI.

CALCUL, EN DEUXIÈME APPROXIMATION, D'UNE SOLUTION DES ÉQUATIONS APPROCHÉES DE CHAMP DU CAS EXTÉRIEUR ET DES CONDITIONS APPROCHÉES D'ISOTHERMIE.

Nous nous proposons de calculer, en deuxième approximation, le champ extérieur satisfaisant les hypothèses du paragraphe 35, dans lequel sont explicités les résultats de première approximation.

38. Développements limités à la deuxième approximation de $\gamma_{\alpha\beta}$, $\gamma^{\alpha\beta}$ correspondant à ceux de $\Gamma^{\alpha\beta}$. — Tous les calculs seront menés en

utilisant les densités tensorielles $\Gamma^{\alpha\beta}$. Nous posons, compte tenu des résultats de la première approximation (V. 12) :

$$(VI.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Gamma^{00} = -1 - \frac{2U}{c^2} + \frac{V^{00}}{c^4} + O\left(\frac{1}{c^6}\right), \\ \Gamma^{44} = 1 + \frac{4U}{c^2} + \frac{V^{44}}{c^4} + O\left(\frac{1}{c^6}\right), \\ \Gamma^{4A} = \frac{\alpha_{4A}}{c^3} + \frac{V^{4A}}{c^5} + O\left(\frac{1}{c^7}\right), \\ \Gamma^{04} = \frac{2V}{c^2} + \frac{V^{04}}{c^4} + O\left(\frac{1}{c^6}\right), \\ \Gamma^{0A} = -\frac{\alpha_{0A}}{c^3} + \frac{V^{0A}}{c^5} + O\left(\frac{1}{c^7}\right), \\ \Gamma^{AB} = -\delta_{AB} + \frac{V^{AB}}{c^4} + O\left(\frac{1}{c^6}\right). \end{array} \right.$$

Rappelons que

$$(VI.2) \quad \alpha_{4A} = 4G \sum_{s=1}^N \frac{m_s \dot{\xi}_s^A}{r_s}, \quad \alpha_{0A} = -2\sqrt{G} \sum_{s=1}^N \frac{e_s \dot{\xi}_s^A}{r_s}.$$

Les équations de champ du cas extérieur, équations valables en deuxième approximation, permettront de calculer $V^{\alpha i}$. Posons

$$\sqrt{\gamma} = 1 + \frac{2U}{c^2} + \frac{R}{c^4} + O\left(\frac{1}{c^6}\right),$$

γ et Γ sont respectivement les déterminants de $\gamma_{\alpha\beta}$ et $\Gamma^{\alpha\beta}$,

$$\Gamma = \det(\gamma^{\alpha\beta} \sqrt{\gamma}) = \gamma^{\frac{3}{2}}, \quad \sqrt{\gamma} = \Gamma^{\frac{1}{3}},$$

donc

$$R = \frac{1}{3} \left(V^{44} - V^{00} - \sum_B V^{BB} - 4V^2 - 4U^2 \right),$$

Des relations

$$\gamma^{0\rho} \gamma_{\rho 0} = 1,$$

$$\gamma_{00} = -1,$$

on déduit

$$(VI.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \gamma^{00} = -1 - \frac{\alpha_{00}}{c^2} + \frac{4V^2}{c^4} + O\left(\frac{1}{c^6}\right), \\ V^{00} = 2U^2 + 8V^2 + \frac{1}{2} \left(\sum_B V^{BB} - V^{44} \right), \\ R = \frac{1}{2} \left(V^{44} - \sum_B V^{BB} \right) - 4V^2 - 2U^2. \end{array} \right.$$

Les relations $\Gamma^{\alpha\beta} = \gamma^{\alpha\beta} \sqrt{\gamma}$ entraînent

$$(VI.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \gamma^{0A} = -\frac{\alpha_{0A}}{c^3} + \frac{V^{0A} + 2U\alpha_{0A}}{c^5} + O\left(\frac{1}{c^7}\right), \\ \gamma^{0k} = \frac{2V}{c^2} + \frac{V^{0k} - 4UV}{c^4} + O\left(\frac{1}{c^6}\right), \\ \gamma^{A4} = \frac{\alpha_{A4}}{c^3} + \frac{V^{A4} - 2U\alpha_{A4}}{c^5} + O\left(\frac{1}{c^7}\right), \\ \gamma^{kk} = 1 + \frac{2U}{c^2} + \frac{V^{kk} - R - 4U^2}{c^4} + O\left(\frac{1}{c^6}\right), \\ \gamma^{AB} = -\delta_A^B + \frac{2\delta_A^B U}{c^2} + \frac{V^{AB} + \delta_A^B(R - 4U^2)}{c^4} + O\left(\frac{1}{c^6}\right). \end{array} \right.$$

Nous déduisons des relations $\gamma^{\alpha\rho}\gamma_{\rho\beta} = \delta_\beta^\alpha$:

$$(VI.5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \gamma_{0A} = \frac{\alpha_{0A}}{c^3} + \frac{2V\alpha_{A4} - V^{0A}}{c^5} + O\left(\frac{1}{c^7}\right), \\ \gamma_{0k} = \frac{\alpha_{0k}}{c^2} + \frac{V^{0k} - 8UV}{c^4} + O\left(\frac{1}{c^6}\right), \\ \gamma_{A4} = \frac{\alpha_{A4}}{c^3} + \frac{V^{A4} - 2V\alpha_{0A} - 2U\alpha_{A4}}{c^5} + O\left(\frac{1}{c^7}\right), \\ \gamma_{kk} = 1 - \frac{2U}{c^2} + \frac{R - V^{kk} - 4V^2 + 8U^2}{c^4} + O\left(\frac{1}{c^6}\right), \\ \gamma_{AB} = -\delta_A^B - \frac{2\delta_A^B U}{c^2} - \frac{V^{AB} + \delta_A^B R}{c^4} + O\left(\frac{1}{c^6}\right). \end{array} \right.$$

Dans la suite, pour simplifier l'écriture, nous pourrions désigner par $\beta_{\alpha\beta}$ le coefficient de $\frac{1}{c^4}$ ou $\frac{1}{c^5}$ dans le développement de $\gamma_{\alpha\beta}$,

39. Équations de champ du cas extérieur en coordonnées isothermes, en deuxième approximation. — Elles s'écrivent en coordonnées isothermes :

$$S_{(t)}^{\alpha t} = 0.$$

L'expression de $\sqrt{\gamma} S_{(t)}^{\alpha t}$ est donnée par (III.3). On calcule facilement les différents termes, en choisissant comme variable de champ les densités tensorielles

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \square \Gamma^{\alpha t} &= -\frac{1}{2} \Delta \Gamma^{\alpha t} + \frac{1}{2c^2} \partial_{\mu} \Gamma^{\alpha t} + \frac{U}{c^2} \Delta \Gamma^{\alpha t} + O\left(\frac{1}{c^6}\right), \\ &- \gamma^{\lambda\mu} \Gamma_{\lambda} \partial_{\mu} \Gamma^{\alpha t} = \frac{2}{c^2} \partial_M U \partial_M \Gamma^{\alpha t} + O\left(\frac{1}{c^6}\right). \end{aligned}$$

Le calcul des autres termes intervenant dans $\sqrt{\gamma} S_{(i)}^{\alpha i}$ a été déjà fait pour obtenir les équations de mouvement en première approximation, en théorie de Jordan-Thiry. Les équations de champ du cas extérieur s'écrivent alors :

$$(1) \quad \Delta V^{44} = 4 \partial_{t^2} U - 2 \partial_M V \partial_M V + 14 \partial_M U \partial_M U,$$

$$(2) \quad \Delta V^{4A} = \partial_{t^2} \alpha_{4A} - 4 \partial_M U (\partial_M \alpha_{4A} - \partial_A \alpha_{4M}),$$

$$(3) \quad \Delta V^{AB} = -4 \partial_A U \partial_B U + 2 \delta_A^B \partial_M U \partial_M U + 4 \partial_A V \partial_B V - 2 \delta_A^B \partial_M V \partial_M V,$$

$$(4) \quad \Delta V^{04} = 2 \partial_{t^2} V + 12 \partial_M V \partial_M U,$$

$$(5) \quad \Delta V^{0A} = -\partial_{t^2} \alpha_{A0} + 2 \partial_M U (\partial_A \alpha_{0M} - \partial_M \alpha_{0A}) + 2 \partial_M V (\partial_M \alpha_{4A} - \partial_A \alpha_{4M}) \\ - 4 \partial_A V \partial_t U - 8 \partial_t V \partial_A U.$$

Il résulte de (3) :

$$(3') \quad \Delta V^{BB} = 2 \partial_B U \partial_B U - 2 \partial_B V \partial_B V.$$

40. Calcul d'une solution des équations de champ. — a. Choix de la solution des équations de champ satisfaisant l'hypothèse de singularités ponctuelles présentant la symétrie sphérique. — Le champ possède N singularités ponctuelles. En première approximation, nous les avons supposées à symétrie sphérique, ce qui se

traduisait par le choix $u = \sum_{s=1}^N \frac{\alpha_s}{r_s}$ comme solution de l'équation $\Delta u = 0$

(α_s sont des fonctions du temps seulement). Nous conservons l'hypothèse précédente en deuxième approximation. Nous avons vu dans le paragraphe précédent que les équations de champ sont des équations de Laplace avec second membre. Pour les résoudre, on en cherche une solution particulière à laquelle on ajoute une solution de l'équa-

tion sans second membre de la forme $\sum_{s=1}^N \frac{\alpha_s}{r_s}$.

Les fonctions de t arbitraires α_s seront déterminées dans le paragraphe 41 par les conditions d'isothermie, $\sigma_{(5)}^0 = 0$ et $\sigma_{(5)}^4 = 0$.

b. Solutions particulières de certaines équations de Laplace avec second membre. Nous utiliserons les relations suivantes (R) qui

s'établissent immédiatement, en développant les premiers membres :

$$(R) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta \left[\left(\sum_s \frac{\alpha_s}{r_s} \right) \left(\sum_s \frac{\beta_s}{r_s} \right) \right] = 2 \partial_M \left(\sum_s \frac{\alpha_s}{r_s} \right) \partial_M \left(\sum_s \frac{\beta_s}{r_s} \right), \\ \Delta \left[\frac{x^P - \xi_s^P}{r_s} \right] = 2 \partial_P \frac{1}{r_s}, \\ \Delta r_s = \frac{2}{r_s}, \\ \Delta \left[\frac{\delta_M^P}{r_s^2} - r_s^2 \partial_M \frac{1}{r_s} \partial_P \frac{1}{r_s} \right] = 4 \partial_M \frac{1}{r_s} \partial_P \frac{1}{r_s}, \\ \Delta \left[r_s (x^M - \xi_s^M) \right] = \frac{4 (x^M - \xi_s^M)}{r_s}, \\ \Delta \left[\frac{(x^P - \xi_k^P) (x^M - \xi_k^M)}{r_k} - \delta_M^P r_k \right] = 4 (x^P - \xi_k^P) \partial_M \frac{1}{r_k}, \\ \Delta \left[(x^P - \xi_k^P) (x^M - \xi_k^M) (x^B - \xi_k^B) - \frac{1}{2} \delta_M^P r_k (x^B - \xi_k^B) \right. \\ \quad \left. - \frac{1}{2} \delta_B^P r_k (x^M - \xi_k^M) - \frac{1}{2} \delta_M^B r_k (x^P - \xi_k^P) \right] \\ = 6 (x^P - \xi_k^P) (x^B - \xi_k^B) \partial_M \frac{1}{r_k}, \end{array} \right.$$

α_s et β_s dépendent uniquement du temps.

En utilisant les relations précédentes, nous obtenons une solution particulière des équations (1), (4) et (3'). Nous trouverons des solutions particulières des équations (2), (3) et (5) seulement au voisinage de la $k^{\text{ième}}$ particule G_k , solution qui, ainsi que nous le verrons plus tard, sera suffisante pour obtenir les équations de mouvement. Dans ces trois dernières équations, nous sommes amenés à chercher une solution particulière de

$$(a_1) \quad \Delta u = \partial_M \left(\sum_s \frac{\alpha_s}{r_s} \right) \partial_A \left(\sum_s \frac{\beta_s}{r_s} \right).$$

En supposant l'indice $q \neq k$, nous avons

$$(a_2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \partial_A \frac{1}{r_q} = \tilde{\partial}_A \frac{1}{r_q} + (x^B - \xi_k^B) \tilde{\partial}_{AB} \frac{1}{r_q} + \frac{1}{2!} (x^B - \xi_k^B) (x^P - \xi_k^P) \tilde{\partial}_{ABP} \frac{1}{r_q} \\ \quad + \frac{1}{3!} (x^Q - \xi_k^Q) (x^B - \xi_k^B) (x^P - \xi_k^P) \left[\partial_{ABPQ} \frac{1}{r_q} \right]_{x^R + \theta (\xi_k^R - x^R)} \\ \quad (0 < \theta < 1). \end{array} \right.$$

En décomposant le deuxième membre de (a_1) , on est amené à chercher une solution particulière de

$$(a_3) \quad \Delta u = \partial_M \frac{1}{r_k} \partial_A \frac{1}{r_q}.$$

Soit (C_k) un voisinage de la $k^{\text{ième}}$ particule, G_k ayant pour coordonnées (ξ_k^M) .

A partir de (a_1) et (a_2) , on doit chercher une solution particulière de quatre équations :

$$(a_4) \quad \Delta u = \partial_M \frac{1}{r_k} \tilde{\partial}_A \frac{1}{r_q},$$

$$(a_5) \quad \Delta u = \partial_M \frac{1}{r_k} (x^B - \xi_k^B) \tilde{\partial}_{AB} \frac{1}{r_q},$$

$$(a_6) \quad \Delta u = \frac{1}{2!} \partial_M \frac{1}{r_k} (x^B - \xi_k^B) (x^P - \xi_k^P) \tilde{\partial}_{ABP} \frac{1}{r_q},$$

$$(a_7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta u = \frac{1}{3!} \partial_M \frac{1}{r_k} (x^Q - \xi_k^Q) (x^B - \xi_k^B) (x^P - \xi_k^P) \left[\partial_{ABPQ} \frac{1}{r_q} \right]_{x^R + \theta (\xi_k^R - x^R)} \\ (0 < \theta < 1). \end{array} \right.$$

D'après la deuxième relation (R), (a_4) admet pour solution particulière

$$u_0 = \frac{1}{2} \partial_M r_k \tilde{\partial}_A \frac{1}{r_q},$$

(a_5) admet pour solution particulière

$$u_1 = \left[\frac{(x^B - \xi_k^B) (x^M - \xi_k^M)}{r_k} - \delta_B^M r_k \right] \tilde{\partial}_{AB} \frac{1}{r_q}.$$

u_1 et ses dérivées premières sont des fonctions bornées. Les dérivées secondes de u_1 sont de la forme $\frac{F(x^1, x^2, x^3)}{r_k}$, où $F(x^1, x^2, x^3)$ est une fonction bornée.

u_2 est bornée ainsi que ses dérivées des deux premiers ordres.

Si $h(M, x^i)$ désigne le deuxième membre de (a_7) (M ayant pour coordonnées x^1, x^2, x^3), $h(M, x^4)$ est une fonction continue; ses dérivées premières sont des fonctions continues des coordonnées

polaires d'origine le point G_k . Dans (C_k) , (α_7) admet alors la solution particulière

$$u_3(M, x^i) = \iiint_{C_k} \frac{h(P, x^i)}{r_{MP}} d\nu.$$

P est le point courant de C_k , $d\nu$ l'élément de volume de l'espace euclidien à trois dimensions E_3 . u_3 admet des dérivées des deux premiers ordres qui sont bornées. Une solution particulière de (α_3) est donc

$$u = \frac{1}{2} \partial_M r_k \tilde{\partial}_\Lambda \frac{1}{r_q} + f(x^1, x^2, x^3, x^4),$$

$f(x^1, x^2, x^3, x^4)$ est bornée dans un voisinage de G_k ainsi que ses dérivées premières; ses dérivées secondes sont de la forme $\frac{F(x^1, x^2, x^3, x^4)}{r_k}$, où F est une fonction bornée au voisinage de G_k .

Il reste à trouver une solution particulière de

$$(\alpha_8) \quad \Delta u = \partial_\Lambda \frac{1}{r_q} \partial_M \frac{1}{r_m} \quad (q \text{ et } m \neq K).$$

Le deuxième membre est une fonction analytique dans un voisinage C_k de G_k , donc l'équation admet dans C_k une solution particulière analytique.

On arrive donc au résultat suivant :

$$(VI.6) \quad \left[\begin{aligned} & \Delta \left[\frac{\alpha_k \beta_k}{4} \left(\frac{\partial_M}{r_k^2} - r_k^2 \partial_M \frac{1}{r_k} \partial_\Lambda \frac{1}{r_k} \right) + \frac{1}{2} \partial_M (\alpha_k r_k) \tilde{\partial}_\Lambda \frac{\beta_q}{r_q} \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{2} \partial_\Lambda (\beta_k r_k) \tilde{\partial}_M \frac{\alpha_q}{r_q} + f(x^1, x^2, x^3, x^4) \right] \\ & \quad = \partial_M \left(\sum_s \frac{\alpha_s}{r_s} \right) \partial_\Lambda \left(\sum_s \frac{\beta_s}{r_s} \right), \end{aligned} \right]$$

où $f(x^1, x^2, x^3, x^4)$ est bornée dans un voisinage de G_k ainsi que ses dérivées premières. Les dérivées secondes sont de la forme $\frac{F(x^1, x^2, x^3, x^4)}{r_k}$, où F est bornée dans un voisinage de G_k .

c. Solution effective des équations de champ en deuxième approximation. — En utilisant les résultats du paragraphe précédent, on trouve

$$\begin{aligned}
 V^{44} &= \sum_{s=1}^N \frac{A_s^{44}}{r_s} + 2 \sum_{s=1}^N G m_s \partial_{t^2} r_s - V^2 + 7 U^2, \\
 V^{04} &= \sum_{s=1}^N \frac{A_s^{04}}{r_s} + \sum_{s=1}^N \sqrt{G} e_s \partial_{t^2} r_s + 6 UV, \\
 V^{A4} &= 2 \sum_{s=1}^N G m_s \partial_{t^2} (\xi_s^A r_s) + \frac{7 (G m_k)^2 - G e_k^2}{r_k^2} \xi_k^A \\
 &\quad + [(G m_k)^2 - G e_k^2] \partial_A r_k \partial_t \frac{1}{r_k} \\
 &\quad + 2 \partial_B r_k \sum_{q \neq k} \tilde{\partial}_B \frac{4 G m_k G m_q - G e_k e_q}{r_q} (\xi_k^A + \xi_q^A) \\
 &\quad + 2 \partial_B r_k \sum_{q \neq k} \tilde{\partial}_A \frac{1}{r_q} [\xi_q^B (G e_k e_q - 4 G m_k G m_q) + 3 G m_k G m_q \xi_k^B] \\
 &\quad + 2 \partial_A r_k \sum_{q \neq k} \tilde{\partial}_B \frac{1}{r_q} [\xi_k^B (G e_k e_q - 4 G m_k G m_q) + 3 G m_k G m_q \xi_q^B] \\
 &\quad + \frac{A_k^{4A}}{r_k} + f(x^1, x^2, x^3, x^4), \\
 V^{AB} &= \left[G e_k^2 - (G m_k)^2 \partial_A r_k \partial_B \frac{1}{r_k} \right. \\
 &\quad + 2 \partial_A r_k \sum_{q \neq k} \tilde{\partial}_B \frac{G e_k e_q - G m_k G m_q}{r_q} \\
 &\quad + 2 \partial_B r_k \sum_{q \neq k} \tilde{\partial}_A \frac{G e_k e_q - G m_k G m_q}{r_q} \\
 &\quad \left. + 2 \partial_A^B \partial_C r_k \sum_{q \neq k} \tilde{\partial}_C \frac{G m_k G m_q - G e_k e_q}{r_q} \right] \\
 &\quad + \frac{A_k^{AB}}{r_k} + g(x^1, x^2, x^3, x^4), \\
 V^{BB} &= U^2 - V^2 + \sum_s \frac{a_s^{BB}}{r_s}.
 \end{aligned}
 \tag{VI.7}$$

Les fonctions f et g n'intervenant pas dans les équations de mouvement, il est inutile de donner leurs expressions.

Elles satisfont les propriétés suivantes : Ce sont des fonctions bornées au voisinage de G_k , ainsi que leurs dérivées premières. Leurs dérivées secondes sont de la forme $\frac{F(x^1, x^2, x^3, x^4)}{r_k}$, où F est une fonction bornée au voisinage de G_k .

De l'équation (5) on peut tirer V^{0A} : nous ne donnons pas son expression, car elle est inutile pour obtenir les équations de mouvement.

Des tableaux (VI.5) et (VI.7), nous déduisons le tableau (VI.7') donnant $\beta_{\alpha\beta}$ (tableau que nous utiliserons souvent dans le chapitre VII) :

$$(VI.7') \quad \left\{ \begin{array}{l} \beta_{44} = 2U^2 - 7V^2 - \partial_{\mu}(Gm_s r_s) - \sum_s \frac{A_s^{44} + \sum_B a_s^{BB}}{2r_s}, \\ \beta_{04} = \sum_s \frac{A_s^{04}}{r_s} + \sqrt{G} \sum_s e_s \partial_{\mu} r_s - 2UV, \\ \beta_{4A} = V^{4A} - 2V\alpha_{0A} - 2U\alpha_{4A}, \\ \beta_{AB} = -V^{AB} + \partial_A^B \left[-U^2 + 4V^2 - \sum_s \partial_{\mu}(Gm_s r_s) + \sum_{s,B} \frac{\alpha_s^{BB} - A_s^{44}}{2r_s} \right], \\ \beta_{BB} = -\sum_{s,B} \frac{\alpha_s^{BB}}{r_s} - 4U^2 + 13V^2 - 3\partial_{\mu} \sum_s (Gm_s r_s) + \sum_{s,B} \frac{\alpha_s^{BB} - 3A_s^{44}}{2r_s}. \end{array} \right.$$

Nous n'avons pas remplacé effectivement V^{4A} et V^{AB} par leurs valeurs données dans (VI.7), car nous n'en aurons pas besoin.

41. **Détermination des fonctions de t , $A_k^{\alpha\beta}$.** — Les fonctions de t , $A_k^{\alpha\beta}$ se déterminent à partir des conditions d'isothermie, de $\sigma_{(s)}^4 = 0$, et de $\sigma_{(s)}^0 = 0$, écrites au voisinage de G_k .

a. $F_{(4)}^A = 0$ au voisinage de G_k :

$$F_{(4)}^A \equiv \partial_M V^{MA} + \partial_t \alpha_{4A} = 0.$$

Par un calcul direct utilisant (VI.7), nous vérifions que les coefficients de $\frac{1}{r_k}$ et $\frac{1}{r_k^2}$, sont respectivement nuls.

En annulant le coefficient de $\partial_M \frac{1}{r_k}$, nous obtenons

$$A_k^{AB} = 4Gm_k \xi_k^A \xi_k^B,$$

d'où

$$\sum_B a_k^{BB} = 4Gm_k \sum_B \xi_k^B \xi_k^B - 2 \frac{Gm_k Gm_q - G e_k e_q}{r_{qk}}.$$

b. $\underline{\sigma_{(5)}^k} = 0$ au voisinage de G_k :

$$\sigma_{(5)}^k \equiv \lim_{r_k \rightarrow 0} \int_{\partial C_k} S_{(5)}^k \frac{X^M}{r_k} dS = 0,$$

compte tenu de $F_{(5)}^M = 0$, nous avons

$$2 S_{(5)}^k \equiv -\Delta \Gamma_{(5)}^k + \partial^L \alpha_{LM} + 4 \partial_B U (\partial_B \alpha_{LM} - \partial_M \alpha_{LB}) + \partial_B \alpha_{0L} (\partial_B \alpha_{0A} - \partial_M \alpha_{0B}) \\ - 12 \partial_A U \partial_L U + \partial_{MP} V^{PA} + \partial_{ML} V^{LL},$$

Or

$$-\Delta V^{LM} + \partial_{MP} V^{PL} \equiv \partial_P [-\partial_P V^{LM} + \partial_M V^{LP}].$$

D'où, en utilisant la démonstration de la deuxième propriété (§ 36), cette dernière expression est ~ 0 ,

$$2 S_{(5)}^k \sim \partial^L \alpha_{LM} + 4 \partial_P U (\partial_P \alpha_{LM} - \partial_M \alpha_{LP}) \\ + 2 \partial_P V (\partial_P \alpha_{0M} - \partial_M \alpha_{0P}) - 12 \partial_M U \partial_L U + \partial_{ML} V^{LL}.$$

En utilisant les calculs d'intégrales de l'appendice, nous obtenons par intégration :

$$2 \sigma_{(5)}^k \equiv 8\pi \tilde{\sigma}_M \frac{(G m_k G m_q - G e_k e_q) (\dot{\xi}_k^M + \dot{\xi}_q^M)}{r_q} - 4\pi \dot{A}_k^{LL} = 0,$$

$$(VI.8) \quad \dot{A}_k^{LL} = 2 \tilde{\sigma}_M \frac{G m_k G m_q - G e_k e_q}{r_q} (\dot{\xi}_k^M + \dot{\xi}_q^M).$$

Intégrons cette équation. Étant donné que

$$\tilde{\sigma}_M \frac{\dot{\xi}_q^M}{r_q} = \tilde{\sigma}_M \frac{\dot{\xi}_k^M}{r_q} - \frac{d}{dt} \frac{1}{r_{qk}},$$

(VI.8) s'écrit

$$\dot{A}_k^{LL} = 4 \tilde{\sigma}_M \frac{G m_k G m_q - G e_k e_q}{r_q} \dot{\xi}_k^M - 2 \frac{d}{dt} \frac{G m_k G m_q - G e_k e_q}{r_{qk}}$$

ou, d'après les équations de mouvement en première approximation :

$$\dot{A}_k^{LL} = 2 \frac{d}{dt} \left[G m_k \dot{\xi}_k^M \dot{\xi}_k^M - \frac{G m_k G m_q - G e_k e_q}{r_{qk}} \right] + O \left(\frac{1}{c^2} \right), \\ (VI.9) \quad \dot{A}_k^{LL} = 2 \left[G m_k \dot{\xi}_k^M \dot{\xi}_k^M - \frac{G m_k G m_q - G e_k e_q}{r_{qk}} \right] + C + O \left(\frac{1}{c^2} \right),$$

C est une constante d'intégration dépendant des conditions initiales.

c. $\underline{F_{(5)}^k} = 0$ au voisinage de G_k :

$$\partial_M V^{ML} + \partial_L V^{LL} = 0.$$

Nous vérifions que les coefficients de $\frac{1}{r_k}$, $\frac{1}{r_k^2}$, $\frac{1}{r_k^3}$ et $(x^B - \xi_k^B) \partial_M \frac{1}{r_k}$ s'annulent respectivement.

L'annulation du coefficients de $\partial_M \frac{1}{r_k}$ entraîne, compte tenu de (VI.9) :

$$A_k^{4A} = 2 G m_k \xi_k^A \xi_k^B \xi_k^B + 12 \frac{G m_k G m_q}{r_{qk}} \xi_k^A - C \xi_k^A.$$

d. $\underline{\sigma_{(5)}^0} = 0$ au voisinage de G_k :

En tenant compte des conditions d'isothermie d'ordre ≤ 4 , on a

$$2S_{(5)}^{0M} \equiv -\Delta V^{0M} - \partial_t \alpha_{0M} + 2\partial_B U (\partial_M \alpha_{0B} - \partial_B \alpha_{0M}) + \partial_B \alpha_{04} (\partial_B \alpha_{4M} - \partial_M \alpha_{4B}) \\ - 2\partial_M \alpha_{04} \partial_t U - 4\partial_t \alpha_{04} \partial_M U + \partial_{MB} V^{B0} + \partial_{Mt} V^{40}.$$

En vertu de la deuxième propriété (§ 36) :

$$-\Delta V^{0M} + \partial_{MB} V^{B0} \sim 0, \\ 2S_{(5)}^{0M} \sim -\partial_t \alpha_{0M} + 2\partial_B U (\partial_M \alpha_{0B} - \partial_B \alpha_{0M}) + \partial_B \alpha_{04} (\partial_B \alpha_{4M} - \partial_M \alpha_{4B}) \\ - 2\partial_M \alpha_{04} \partial_t U - 4\partial_t \alpha_{04} \partial_M U + \partial_{Mt} V^{40}.$$

En utilisant les calculs d'intégrales donnés dans l'appendice

$$\dot{A}_k^{04} = 2\tilde{\partial}_M \frac{(\xi_k^M - \xi_q^M)(\sqrt{G} e_q G m_k - \sqrt{G} e_k G m_q)}{r_{qk}}.$$

Intégrons cette équation par un procédé analogue à celui utilisé pour intégrer (VI.8) :

$$A_k^{04} = \frac{2(\sqrt{G} e_q G m_k - \sqrt{G} e_k G m_q)}{r_{qk}} + D + O\left(\frac{1}{c^2}\right),$$

D est une constante d'intégration dépendant des conditions initiales.

e. $\underline{F_{(5)}^0} = 0$ au voisinage de G_k :

Les coefficients de $(x^B - \xi_k^B) \partial_M \frac{1}{r_k}$, $\frac{1}{r_k} \partial_B \frac{1}{r_k}$ s'annulent.

Le coefficient de $\frac{1}{r_k}$ est identiquement nul, compte tenu de l'expression trouvée pour A_k^{04} . L'annulation du coefficient de $\partial_B \frac{1}{r_k}$ détermine A_k^{0M} dont nous ne donnons pas l'expression, puisque nous ne l'utiliserons pas.

En résumé :

$$(VI. 10) \left\{ \begin{array}{l} A_k^{AB} = 4 G m_k \xi_k^A \xi_k^B, \\ \sum_B \alpha_k^{BB} = \sum_B 4 G m_k \xi_k^B \xi_k^B - 2 \sum_{q \neq k} \frac{G m_k G m_q - G e_k e_q}{r_{qk}}, \\ A_k^{44} = 2 \left[\sum_B G m_k \xi_k^B \xi_k^B - \sum_{q \neq k} \frac{G m_k G m_q - G e_k e_q}{r_{qk}} \right] \\ \quad + C + O\left(\frac{1}{c^2}\right), \\ A_k^{4A} = \sum_B 2 G m_k \xi_k^A \xi_k^B \xi_k^B + 12 \sum_{q \neq k} \frac{G m_k G m_q}{r_{qk}} \xi_k^A + C \xi_k^A, \\ A_k^{04} = \sum_{q \neq k} \frac{2}{r_{qk}} [\sqrt{G} e_q G m_k - \sqrt{G} e_k G m_q] + B + O\left(\frac{1}{c^2}\right), \end{array} \right.$$

B et C sont des constantes dépendant des conditions initiales.

Dans le chapitre suivant où nous établirons les équations de mouvement en deuxième approximation, nous utiliserons les tableaux de ce chapitre, déterminant le tenseur métrique en deuxième approximation.

CHAPITRE VII.

DEUXIÈME APPROXIMATION DES ÉQUATIONS DE MOUVEMENT PAR LA MÉTHODE DES SINGULARITÉS.

Au paragraphe 36, nous avons vu que les équations approchées de mouvement s'écrivent

$$\sum_{l \leq p} \frac{\sigma_{(l)}^x}{c^l} + O\left(\frac{1}{c^{p+2}}\right) = 0.$$

Ces équations ont été écrites en première approximation.

En deuxième approximation, nous avons déjà déterminé σ^0 et σ^4 .

Les équations

$$\frac{\sigma_{(5)}^0}{c^5} + O\left(\frac{1}{c^7}\right) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\sigma_{(5)}^4}{c^5} + O\left(\frac{1}{c^7}\right) = 0$$

ont permis de déterminer les fonctions de t , A_k^{44} et A_k^{04} [cf. (VI. 10)].

Compte tenu de ces équations, des solutions des équations approchées de champ et des conditions approchées d'isothermie (d'ordre

< 6), les équations de mouvement en deuxième approximation, relatives à la $k^{\text{ième}}$ singularité G_k , sont

$$\frac{\sigma_{(k)}^A}{c^k} + \frac{\sigma_{(6)}^A}{c^6} = O\left(\frac{1}{c^8}\right).$$

Ce chapitre portera donc sur la détermination de $\sigma_{(6)}^A$:

$$\sigma_{(6)}^A \equiv \lim_{r_k \rightarrow 0} \int_{\partial C_k} S_{(6)}^{AM} \frac{x^M - \xi_k^M}{r_k^2} r_k^2 \sin \theta \, d\theta \, d\varphi.$$

42. Calcul de $S_{(6)}^{AM}$ en coordonnées quelconques. — Nous calculons $S_{(6)}^{AM}$ modulo des termes qui, après intégration, n'interviennent pas dans les équations de mouvement. Nous tiendrons compte des conditions d'isothermie d'ordre ≤ 5 .

D'après (VI.5), l'expression de $2S^{AM}$ peut se mettre sous la forme

$$\begin{aligned} 2S^{AM} = & \frac{1}{\sqrt{|\gamma|}} \gamma^{\lambda\mu} \partial_{\lambda\mu} \Gamma^{AM} - \frac{2}{\sqrt{|\gamma|}} \gamma^{\lambda\mu} \Gamma_\lambda \partial_\mu \Gamma^{AM} + \gamma^{AM} P + Q \\ & - \gamma^{\lambda\rho} \partial_\rho F^M - \gamma^{M\rho} \partial_\rho F^\lambda + F^\rho \partial_\rho \gamma^{AM} + \gamma^{AM} (\partial_\rho F^\rho + \Gamma_\rho F^\rho). \end{aligned}$$

où nous avons posé

$$P = \gamma^{\lambda\mu} \Gamma_\lambda \Gamma_\mu + \frac{\Gamma_{\mu\nu}^2}{2} \partial_z \gamma^{\mu\nu},$$

$$Q = -2\Gamma_{\alpha\beta}^A \Gamma_{\gamma\delta}^M \gamma^{\alpha\gamma} \gamma^{\beta\delta}.$$

Nous allons mettre en évidence dans $2S_{(6)}^{AM}$ les termes linéaires par rapport aux densités tensorielles, c'est-à-dire faisant intervenir $\Gamma_{(6)}^{BC}$; nous savons (§ 36) qu'ils doivent s'éliminer dans les équations de mouvement.

Nous allons développer jusqu'à l'ordre 6 compris, certains termes intervenant dans $2S^{AM}$, en tenant compte des conditions d'isothermie d'ordre ≤ 5 :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{|\gamma|}} \gamma^{\lambda\mu} \partial_{\lambda\mu} \Gamma^{AM} &= -\frac{1}{c^4} \Delta V^{AM} \\ &+ \frac{1}{c^6} [-\Delta V^{AM} + 4U \Delta V^{AM} + \partial_\beta V^{AM}] + O\left(\frac{1}{c^8}\right), \\ -\frac{2}{\sqrt{|\gamma|}} \gamma^{\lambda\mu} \Gamma_\lambda \partial_\mu \Gamma^{AM} &= -\frac{4}{c^6} \partial_B U \partial_B V^{AM} + O\left(\frac{1}{c^8}\right), \\ \gamma^{\lambda\rho} \partial_\rho F^M &= -\frac{1}{c^4} [\partial_{AB} V^{BM} + \partial_{A\ell} \alpha_{\ell M}] \\ &- \frac{1}{c^6} [\partial_{AB} V^{BM} + \partial_{A\ell} V^{\ell M}] + O\left(\frac{1}{c^8}\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma^{\mathbf{M}\rho} \partial_\rho \mathbf{F}^{\mathbf{A}} &= -\frac{1}{c^4} [\partial_{\mathbf{M}\mathbf{B}} \mathbf{V}^{\mathbf{B}\mathbf{A}} + \partial_{\mathbf{M}l} \alpha_{\mathbf{A}}] \\
&- \frac{1}{c^6} [\partial_{\mathbf{M}\mathbf{B}} \Gamma_{\{6\}}^{\mathbf{B}\mathbf{A}} + \partial_{\mathbf{M}l} \mathbf{V}^{\mathbf{A}}] + \mathcal{O}\left(\frac{1}{c^8}\right), \\
&- \partial_\rho \gamma^{\mathbf{A}\mathbf{M}} \mathbf{F}^\rho = \mathcal{O}\left(\frac{1}{c^8}\right), \\
&- \gamma^{\mathbf{A}\mathbf{M}} \partial_\rho \mathbf{F}^\rho = \frac{\delta_{\mathbf{A}}^{\mathbf{M}}}{c^6} [\partial_{\mathbf{B}\mathbf{C}} \Gamma_{\{6\}}^{\mathbf{B}\mathbf{C}} + \partial_{\mathbf{B}l} \mathbf{V}^{\mathbf{B}}] + \mathcal{O}\left(\frac{1}{c^8}\right), \\
&- \gamma^{\mathbf{A}\mathbf{M}} \Gamma_\rho \mathbf{F}^\rho = \mathcal{O}\left(\frac{1}{c^8}\right),
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
2\mathbf{S}_{\{6\}}^{\mathbf{A}\mathbf{M}} &\equiv -\Delta \Gamma_{\{6\}}^{\mathbf{A}\mathbf{M}} + \partial_{\mathbf{A}\mathbf{B}} \Gamma_{\{6\}}^{\mathbf{B}\mathbf{M}} + \partial_{\mathbf{M}\mathbf{B}} \Gamma_{\{6\}}^{\mathbf{B}\mathbf{A}} - \partial_{\mathbf{A}}^{\mathbf{M}} \partial_{\mathbf{B}\mathbf{C}} \Gamma_{\{6\}}^{\mathbf{B}\mathbf{C}} + 4\mathbf{U} \Delta \mathbf{V}^{\mathbf{A}\mathbf{M}} + \partial_{l^2} \mathbf{V}^{\mathbf{A}\mathbf{M}} \\
&+ 4\partial_{\mathbf{B}} \mathbf{U} \partial_{\mathbf{B}} \mathbf{V}^{\mathbf{A}\mathbf{M}} + \delta_{\mathbf{A}}^{\mathbf{M}} (2\mathbf{U}\mathbf{P}(4) - \mathbf{P}(6)) + \mathbf{Q}(6),
\end{aligned}$$

$\mathbf{P}(6)$ et $\mathbf{Q}(6)$ ne comportant pas de termes linéaires par rapport aux densités tensorielles, nous ne donnerons pas leurs expressions ici.

L'ensemble des termes faisant intervenir les densités tensorielles à l'ordre 6 peut se mettre sous la forme

$$\partial_{\mathbf{B}} [-\partial_{\mathbf{B}} \Gamma_{\{6\}}^{\mathbf{A}\mathbf{M}} + \delta_{\mathbf{A}}^{\mathbf{B}} \partial_{\mathbf{C}} \Gamma_{\{6\}}^{\mathbf{M}\mathbf{C}} + \partial_{\mathbf{M}} \Gamma_{\{6\}}^{\mathbf{B}\mathbf{A}} - \delta_{\mathbf{A}}^{\mathbf{M}} \partial_{\mathbf{C}} \Gamma_{\{6\}}^{\mathbf{B}\mathbf{C}}].$$

Cette expression est ~ 0 . Après simplification, nous avons

$$\begin{aligned}
(\text{VII.1}) \quad 2\mathbf{S}_{\{6\}}^{\mathbf{A}\mathbf{M}} &\sim \partial_{\mathbf{M}l} \mathbf{V}^{\mathbf{A}} + 4\mathbf{U} \Delta \mathbf{V}^{\mathbf{A}\mathbf{M}} + \partial_{l^2} \mathbf{V}^{\mathbf{A}\mathbf{M}} + 4\partial_{\mathbf{B}} \mathbf{U} \partial_{\mathbf{B}} \mathbf{V}^{\mathbf{A}\mathbf{M}} \\
&+ \delta_{\mathbf{A}}^{\mathbf{M}} [2\mathbf{U}\mathbf{P}(4) - \mathbf{P}(6)] + \mathbf{Q}(6).
\end{aligned}$$

Nous allons calculer chaque terme de (VII.1) en fonction des densités tensorielles.

a. Calcul des symboles de Christoffel. — Le calcul approché des symboles de Christoffel $\Gamma_{\alpha\beta}^{\mathbf{B}}$, jusqu'à l'ordre 4 compris, se déduit des développements limités de $\gamma_{\alpha\beta}$ (V.10) et $\gamma^{\alpha\beta}$ (V.11) :

$$(\text{VII.2}) \quad \left\{ \begin{aligned}
\Gamma_{00}^{\mathbf{B}} &= \mathcal{O}\left(\frac{1}{c^6}\right), \\
\Gamma_{44}^{\mathbf{B}} &= -\frac{\partial_{\mathbf{B}} \mathbf{U}}{c^2} + \frac{1}{c^4} \left[\frac{\partial_{\mathbf{B}} \beta_{44}}{2} + 2\mathbf{U} \partial_{\mathbf{B}} \mathbf{U} - \partial_t \alpha_{\mathbf{B}} \right] + \mathcal{O}\left(\frac{1}{c^6}\right), \\
\Gamma_{04}^{\mathbf{B}} &= \frac{\partial_{\mathbf{B}} \mathbf{V}}{c^2} + \frac{1}{c^4} \left[\frac{1}{2} \partial_{\mathbf{B}} \beta_{04} - \frac{1}{2} \partial_t \alpha_{0\mathbf{B}} - 2\mathbf{U} \partial_{\mathbf{B}} \mathbf{V} \right] + \mathcal{O}\left(\frac{1}{c^6}\right), \\
\Gamma_{0\mathbf{C}}^{\mathbf{B}} &= \frac{1}{2c^3} (\partial_{\mathbf{B}} \alpha_{0\mathbf{C}} - \partial_{\mathbf{C}} \alpha_{0\mathbf{B}}) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{c^5}\right), \\
\Gamma_{\mathbf{C}\mathbf{C}}^{\mathbf{B}} &= \frac{1}{c^3} \left[\delta_{\mathbf{C}}^{\mathbf{B}} \partial_t \mathbf{U} + \frac{\partial_{\mathbf{B}} \alpha_{\mathbf{C}}}{2} - \frac{\partial_{\mathbf{C}} \alpha_{\mathbf{B}}}{2} \right] + \mathcal{O}\left(\frac{1}{c^5}\right), \\
\Gamma_{\mathbf{C}\mathbf{D}}^{\mathbf{B}} &= \frac{1}{c^2} \left(-1 + \frac{2\mathbf{U}}{c^2} \right) (-\delta_{\mathbf{D}}^{\mathbf{B}} \partial_{\mathbf{C}} \mathbf{U} - \delta_{\mathbf{C}}^{\mathbf{B}} \partial_{\mathbf{D}} \mathbf{U} + \delta_{\mathbf{C}}^{\mathbf{B}} \partial_{\mathbf{B}} \mathbf{U}) \\
&- \frac{1}{2c^4} [\partial_{\mathbf{C}} \beta_{\mathbf{B}\mathbf{D}} + \partial_{\mathbf{D}} \beta_{\mathbf{C}\mathbf{B}} - \partial_{\mathbf{B}} \beta_{\mathbf{C}\mathbf{D}}] + \mathcal{O}\left(\frac{1}{c^6}\right).
\end{aligned} \right.$$

b. Calcul de $\delta_\lambda^\alpha [2UP(4) - P(6)] :$

$$P \equiv \gamma^{\lambda\mu} \Gamma_\lambda \Gamma_\mu + \frac{1}{2} \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \partial_\alpha \gamma^{\beta\gamma}.$$

Calculons séparément les deux termes, mis en évidence dans P.

α . Calcul de $\gamma^{\lambda\mu} \Gamma_\lambda \Gamma_\mu :$

$$\Gamma_\lambda \equiv \partial_\lambda \log \sqrt{|\gamma|} = \frac{2\partial_\lambda U}{c^2} + \frac{\partial_\lambda (R - 2U^2)}{c^4} + O\left(\frac{1}{c^6}\right),$$

d'où

$$\gamma^{\lambda\mu} \Gamma_\lambda \Gamma_\mu = -\frac{4\partial_B U \partial_B U}{c^4} + \frac{4}{c^6} [(d_t U)^2 + \partial_B U \partial_B (3U^2 - R)] + O\left(\frac{1}{c^8}\right).$$

β . Calculons jusqu'à l'ordre 6 compris, les différents termes que nous mettons en évidence dans $\frac{1}{2} \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \partial_\alpha \gamma^{\beta\gamma} :$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \partial_\alpha \gamma^{\beta\gamma} &\equiv \frac{1}{2} \Gamma_{\beta\gamma}^4 \partial_4 \gamma^{\beta\gamma} + \frac{1}{2} \Gamma_{44}^B \partial_B \gamma^{44} + \Gamma_{04}^B \partial_B \gamma^{04} + \Gamma_{0C}^B \partial_B \gamma^{0C}, \\ \frac{1}{2} \Gamma_{\beta\gamma}^4 \partial_4 \gamma^{\beta\gamma} &= \frac{1}{c^6} [\alpha_{B4} \partial_t U - \partial_B V \partial_t \alpha_{0B} - \partial_B U \partial_t \alpha_{4B}] + O\left(\frac{1}{c^8}\right), \end{aligned}$$

or

$$F_{(3)}^4 \equiv \partial_B \alpha_{B4} + 4\partial_t U = 0,$$

d'où

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \Gamma_{\beta\gamma}^4 \partial_4 \gamma^{\beta\gamma} &= \frac{1}{c^6} [2(d_t U)^2 - \partial_B V \partial_t \alpha_{0B} - \partial_B U \partial_t \alpha_{4B}] + O\left(\frac{1}{c^8}\right), \\ \frac{1}{2} \Gamma_{44}^B \partial_B \gamma^{44} &= -\frac{\partial_B U \partial_B U}{c^4} + \frac{\partial_B U}{c^6} [\partial_B (\beta_{44} + 2V^2 - U^2) - \partial_t \alpha_{4B}] + O\left(\frac{1}{c^8}\right). \end{aligned}$$

En remplaçant β_{44} par son expression (VI.7') :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \Gamma_{44}^B \partial_B \gamma^{44} &= -\frac{\partial_B U \partial_B U}{c^4} \\ &\quad - \frac{\partial_B U}{c^6} \left[\partial_B (5V^2 - U^2 + G m_s \partial_t r_s \right. \\ &\quad \left. + \frac{A_s^{44} + \alpha_s^{CC}}{2r_s}) + \partial_t \alpha_{4B} \right] + O\left(\frac{1}{c^8}\right), \\ \frac{1}{2} \Gamma_{04}^B \partial_B \gamma^{04} &= \frac{2\partial_B V \partial_B V}{c^4} + \frac{\partial_B V}{c^6} [2\partial_B \beta_{04} + 4V \partial_B U - \partial_t \alpha_{0B}] + O\left(\frac{1}{c^8}\right) \end{aligned}$$

et en remplaçant β_{04} par son expression (VI.7') :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \Gamma_{04}^B \partial_B \gamma^{04} &= \frac{2\partial_B V \partial_B V}{c^4} + \frac{\partial_B V}{c^6} \\ &\quad \times \left[2\partial_B \left(\frac{A_s^{04}}{r_s} + \sqrt{G} e_s \partial_t r_s \right) - 4U \partial_B V - \partial_t \alpha_{0B} \right] + O\left(\frac{1}{c^8}\right), \end{aligned}$$

$$\Gamma_{0C}^B \partial_B \gamma^{0C} = \frac{1}{2c^6} \sum_{B,C} \partial_B \alpha_{0C} (\partial_C \alpha_{0B} - \partial_B \alpha_{0C}),$$

$$\Gamma_{4C}^B \partial_B \gamma^{4C} = \frac{1}{c^6} \sum_{B,C} \left[\partial_B \alpha_{4B} \partial_t U + \frac{1}{2} \partial_B \alpha_{4C} (\partial_B \alpha_{4C} - \partial_C \alpha_{4B}) \right] + O\left(\frac{1}{c^8}\right),$$

c'est-à-dire, compte tenu de $\partial_B \alpha_{4B} = -4 \partial_t U$:

$$\Gamma_{4C}^B \partial_B \gamma^{4C} = \left[-4 (\partial_t U)^2 + \frac{1}{2} \partial_B \alpha_{4C} (-\partial_C \alpha_{4B} + \partial_B \alpha_{4C}) \right] \frac{1}{c^6} + O\left(\frac{1}{c^8}\right),$$

$$\frac{1}{2} \Gamma_{CD}^B \partial_B \gamma^{CD} = -\frac{\partial_B U \partial_B U}{c^4} + \frac{2 \partial_B U}{c^6} [3 \partial_B U^2 - 2 \partial_C \beta_{BC} + \partial_B \beta_{CC}] + O\left(\frac{1}{c^8}\right).$$

R étant donné par (VI.3) :

$$\frac{1}{2} \Gamma_{CD}^B \partial_B \gamma^{CD} = \frac{2}{c^6} \sum_{B,C} \partial_B U \left[5 \partial_B U^2 + 4 \partial_B V^2 - \frac{\partial_B V^{44}}{2} \right. \\ \left. - \frac{\partial_B V^{CC}}{2} + 2 \partial_C V^{CB} \right] + O\left(\frac{1}{c^8}\right).$$

La condition d'isothermie $F_{(4)}^B = 0$ entraîne

$$\partial_C V^{CB} = -\partial_t \alpha_{4B}.$$

De plus, V^{CC} et V^{44} résultent de (VI.7) :

$$\frac{1}{2} \Gamma_{CD}^B \partial_B \gamma^{CD} = -\sum_B \frac{\partial_B U \partial_B U}{c^4} \\ + \frac{1}{c^6} \left\{ \sum_B \partial_B U \partial_B \left[U^2 + 5 V^2 \right. \right. \\ \left. \left. - \sum_s \partial_s^2 (G m_s r_s) - \sum_{s,P} \frac{a_s^{PP} + A_s^{44}}{2 r_s} \right] \right. \\ \left. - 2 \sum_B \partial_B U \partial_t \alpha_{4B} \right\} + O\left(\frac{1}{c^8}\right).$$

En portant les résultats obtenus ci-dessus dans (VII.2), il vient

$$(VII.3) \quad \delta_A^M [2 UP(4) - P(6)]$$

$$= \sum_{s=1}^N \delta_A^M \left\{ 2 (\partial_t U)^2 + \partial_B U \partial_B \right. \\ \left[-16 U^2 - 16 V^2 + 6 \partial_s^2 (G m_s r_s) + \frac{3 A_s^{44} - a_s^{PP}}{r_s} \right] \\ + 4 \partial_B U \partial_t \alpha_{4B} + \frac{1}{2} \partial_B \alpha_{4C} (\partial_C \alpha_{4B} - \partial_B \alpha_{4C}) \\ + 2 \partial_B V \partial_t \alpha_{0B} - 2 \partial_B V \left[\partial_B \frac{A_s^{04}}{r_s} + \sqrt{G} e_s \partial_B^2 r_s \right] \\ \left. + 8 U \partial_B V \partial_B V + \frac{1}{2} \partial_B \alpha_{0C} [\partial_B \alpha_{0C} - \partial_C \alpha_{0B}] \right\}.$$

c. Calcul de $Q(6) + 4\partial_B U \partial_B V^{AM}$:

$$Q = -2\Gamma_{\alpha\beta}^{\Lambda} \Gamma_{\gamma\delta}^M \gamma^{\alpha\gamma} \gamma^{\beta\delta}.$$

En écrivant les développements limités de $\gamma^{\alpha\gamma}$ et $\gamma^{\beta\delta}$ [(V.10) et (V.11)], et en tenant compte des ordres de grandeurs des symboles de Christoffel (VII.2) :

$$\begin{aligned} \text{(VII.4)} \quad Q \equiv & -2 \left\{ \Gamma_{\alpha\beta}^{\Lambda} \Gamma_{\gamma\delta}^M \left(1 + \frac{4U}{c^2} \right) - 2\Gamma_{0\alpha}^{\Lambda} \Gamma_{0\beta}^M \left(1 + \frac{2U}{c^2} \right) \right. \\ & + \Gamma_{0\alpha}^{\Lambda} \Gamma_{\beta\gamma}^M + \Gamma_{\alpha\beta}^{\Lambda} \Gamma_{0\gamma}^M + 2 \sum_B \Gamma_{0B}^{\Lambda} \Gamma_{0B}^M \\ & \left. - 2 \sum_B \Gamma_{\alpha B}^{\Lambda} \Gamma_{\beta B}^M + \sum_{B,C} \Gamma_{BC}^{\Lambda} \Gamma_{BC}^M \left(1 - \frac{4U}{c^2} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Le tableau (VII.2) nous permet de calculer les différents termes intervenant dans Q .

$$\begin{aligned} \Gamma_{\alpha\beta}^{\Lambda} \Gamma_{\gamma\delta}^M \left(1 + \frac{4U}{c^2} \right) &= \frac{\partial_{\Lambda} V \partial_M V}{c^4} \\ &+ \frac{1}{c^6} \left[\partial_{\Lambda} U \left(\partial_t x_{\Lambda M} - \partial_M \frac{x_{\Lambda\Lambda}}{2} \right) \right. \\ &\quad \left. + \partial_M U \left(\partial_t x_{\Lambda\Lambda} - \partial_{\Lambda} \frac{\beta_{\Lambda\Lambda}}{2} \right) \right] + O\left(\frac{1}{c^8}\right). \end{aligned}$$

En considérant les calculs d'intégrales de l'Appendice, nous remarquons

$$\begin{aligned} (\alpha_1) \quad & \left(\partial_{\Lambda} \sum_s \frac{\alpha_s}{r_s} \right) \left(\partial_M \sum_s \frac{\beta_s}{r_s} \right) + \left(\partial_M \sum_s \frac{\alpha_s}{r_s} \right) \left(\partial_{\Lambda} \sum_s \frac{\beta_s}{r_s} \right) \\ & \sim \sum_B 4 \partial_{\Lambda}^M \left(\sum_s \partial_B \frac{\alpha_s}{r_s} \right) \left(\sum_s \partial_B \frac{\beta_s}{r_s} \right), \\ (\alpha_2) \quad & \left(\sum_s \frac{\gamma_s}{r_s} \right) \left[\left(\partial_{\Lambda} \sum_s \frac{\alpha_s}{r_s} \right) \left(\partial_M \sum_s \frac{\beta_s}{r_s} \right) + \left(\partial_M \sum_s \frac{\alpha_s}{r_s} \right) \left(\partial_{\Lambda} \sum_s \frac{\beta_s}{r_s} \right) \right] \\ & \sim \sum_B 4 \partial_{\Lambda}^M \left(\sum_s \frac{\gamma_s}{r_s} \right) \left(\partial_B \sum_s \frac{\alpha_s}{r_s} \right) \left(\partial_B \sum_s \frac{\beta_s}{r_s} \right) \end{aligned}$$

(α_s , β_s et γ_s sont des fonctions de t seulement).

En tenant compte de (α_1) et (α_2) et en remplaçant β_{44} par sa valeur déduite de (VI.7') :

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{44}^A \Gamma_{44}^M \left(1 + \frac{4U}{c^2} \right) &\sim \frac{2\partial_B V \partial_B V}{c^4} \\
 &+ \frac{1}{c^6} \left[\partial_A U \left(\partial_t \alpha_{4M} + \frac{1}{2} G m_s \partial_{M^2} r_s \right) \right. \\
 &\quad \left. + \partial_M U \left(\partial_t \alpha_{4A} + \frac{1}{2} G m_s \partial_{A^2} r_s \right) \right. \\
 &\quad \left. + \delta_A^M \partial_B U \partial_B \left(-4U^2 + 14V^2 + \frac{A_s^{44} + a_s^{cc}}{r_s} \right) \right] \\
 &+ O\left(\frac{1}{c^8}\right), \\
 -2\Gamma_{04}^A \Gamma_{04}^M \left(1 + \frac{2U}{c^2} \right) &= -\frac{2\partial_A V \partial_M V}{c^4} \\
 &+ \frac{1}{c^6} \left[-\partial_A V (\partial_M \beta_{04} - \partial_t \alpha_{0M}) \right. \\
 &\quad \left. - \partial_M V (\partial_A \beta_{04} - \partial_t \alpha_{0A}) + 4U \partial_A V \partial_M V \right] \\
 &+ O\left(\frac{1}{c^8}\right).
 \end{aligned}$$

En remplaçant β_{04} par sa valeur (VI.7') et en tenant compte de (α_2) :

$$\begin{aligned}
 -2\Gamma_{04}^A \Gamma_{04}^M \left(1 + \frac{2U}{c^2} \right) \\
 \sim -\sum_B \frac{4\partial_B V \partial_B V}{c^4} + \frac{1}{c^6} \left[\partial_A V (\partial_t \alpha_{0M} - \sqrt{G} e_s \partial_{M^2} r_s) \right. \\
 \quad \left. + \partial_M V (\partial_t \alpha_{0A} - \sqrt{G} e_s \partial_{A^2} r_s) \right. \\
 \quad \left. + \delta_A^M \sum_B \partial_B V \left(-4\partial_B \sum_s \frac{A_s^{04}}{r_s} + 8V \partial_B U + 8U \partial_B V \right) \right] \\
 \quad + O\left(\frac{1}{c^8}\right), \\
 \frac{4V}{c^2} (\Gamma_{04}^A \Gamma_{44}^M + \Gamma_{44}^A \Gamma_{04}^M) = -\frac{4V}{c^6} (\partial_A V \partial_M U + \partial_M V \partial_A U) + O\left(\frac{1}{c^8}\right)
 \end{aligned}$$

et d'après (α_2) :

$$\begin{aligned} \frac{4V}{c^2} (\Gamma_{0k}^A \Gamma_{0k}^M + \Gamma_{0k}^A \Gamma_{0k}^A) &\sim - \frac{16V}{c^6} \delta_A^M \partial_B V \partial_B U + O\left(\frac{1}{c^8}\right), \\ \sum_B 2 \Gamma_{0B}^A \Gamma_{0B}^M &= \frac{1}{2c^6} \sum_B (\partial_A \alpha_{0B} - \partial_B \alpha_{0A}) (\partial_M \alpha_{0B} - \partial_B \alpha_{0M}) + O\left(\frac{1}{c^8}\right), \\ -2 \sum_B \Gamma_{kB}^A \Gamma_{kB}^M &= \frac{1}{c^6} \left[-2 (\partial_t U)^2 \delta_A^M \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \sum_B (\partial_A \alpha_{kB} - \partial_B \alpha_{kA}) (\partial_M \alpha_{kB} - \partial_B \alpha_{kM}) \right] + O\left(\frac{1}{c^8}\right), \\ \sum_{B,C} \Gamma_{BC}^A \Gamma_{BC}^M \left(1 - \frac{4U}{c^2}\right) &= \frac{1}{c^4} \left[-2 \delta_A^M \sum_B (\partial_B U)^2 - \partial_A U \partial_M U \right] \\ &\quad + \frac{1}{c^6} \left[-8 U (\partial_A U \partial_M U + 2 \delta_A^M \partial_B U \partial_B U) \right. \\ &\quad \left. - 2 \sum_B \partial_B U \partial_B \beta_{AM} \right. \\ &\quad \left. + \partial_A U \sum_B \left(\partial_B \beta_{BM} - \frac{1}{2} \partial_M \beta_{BB} \right) \right. \\ &\quad \left. + \partial_M U \sum_B \left(\partial_B \beta_{BA} - \frac{1}{2} \partial_A \beta_{BB} \right) \right] + O\left(\frac{1}{c^8}\right). \end{aligned}$$

D'après (VI.7') :

$$\begin{aligned} \partial_B \beta_{BM} - \frac{1}{2} \partial_M \beta_{BB} &= -\partial_B V^{BM} \\ &\quad + \frac{1}{2} \partial_M \left[2U^2 - 5V^2 + \sum_s G m_s \partial_s r_s + \sum_s \frac{\alpha_s^{BB} + A_s^{44}}{2r_s} \right]. \end{aligned}$$

La condition d'isothermie $F_{(k)}^M = 0$ s'écrit

$$\partial_B V^{BM} = -\partial_t \alpha_{kM},$$

D'où

$$\begin{aligned} \partial_B \beta_{BM} - \frac{1}{2} \partial_M \beta_{BB} &= \partial_t \alpha_{kM} \\ &\quad + \frac{1}{2} \partial_M \left[2U^2 - 5V^2 + \sum_s G m_s \partial_s r_s + \sum_s \frac{\alpha_s^{BB} + A_s^{44}}{2r_s} \right]. \end{aligned}$$

En tenant compte aussi de (α_1) et (α_2) et en remplaçant β_{AM} par son expression (VI.7'), nous obtenons finalement

$$\begin{aligned} \Gamma_{BC}^A \Gamma_{BC}^M \left(1 - \frac{4U}{c^2} \right) \sim & - \frac{4}{c^4} \delta_A^M \sum_B (\partial_B U)^2 \\ & + \frac{1}{c^6} \left[\partial_A U \left(\partial_t \alpha_{4M} + \frac{1}{2} \sum_s G m_s \partial_{M^2} r_s \right) \right. \\ & + \partial_M U \left(\partial_t \alpha_{4A} + \frac{1}{2} \sum_s G m_s \partial_{A^2} r_s \right) \\ & + \delta_A^M \sum_s \partial_B U \partial_B \left(-10U^2 - 18V^2 + \frac{2A_s^{44}}{r_s} \right. \\ & \left. \left. + 2G m_s \partial_{t^2} r_s - 2V^{AM} \right) \right]. \end{aligned}$$

En portant dans (VII.4) tous les résultats de ce paragraphe, nous déduisons l'expression de $Q(6) + 4 \sum_B \partial_B U \partial_B V^{AM}$, modulo des termes qui n'ont pas de contribution dans les équations de mouvement :

$$\begin{aligned} \text{(VII.5)} \quad Q(6) + 4 \partial_B U \partial_B V^{AM} \\ \sim & \partial_A U \left(-4 \partial_t \alpha_{4M} - 2 \sum_s G m_s \partial_{M^2} r_s \right) \\ & + \partial_M U \left(-4 \partial_t \alpha_{4A} - 2 G m_s \partial_{A^2} r_s \right) \\ & + 4 \delta_A^M \left[(\partial_t U)^2 - 8 U \partial_B V \partial_B V + \partial_B U \partial_B \right. \\ & \quad \left(7U^2 + 4V^2 - \sum_s G m_s \partial_{t^2} r_s \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{2} \sum_s \frac{3A_s^{44} + a_s^{PP}}{r_s} \right) + 2 \sum_B \partial_B V \partial_B \frac{A_s^{04}}{r_s} \left. \right] \\ & + 2 \partial_A V \left(\sum_s \sqrt{G} e_s \partial_{M^2} r_s - \partial_t \alpha_{0M} \right) \\ & + 2 \partial_M V \left(\sum_s \sqrt{G} e_s \partial_{A^2} r_s - \partial_t \alpha_{0A} \right) \\ & - (\partial_A \alpha_{0B} - \partial_B \alpha_{0A}) (\partial_M \alpha_{0B} - \partial_B \alpha_{0M}) \\ & + (\partial_A \alpha_{4B} - \partial_B \alpha_{4A}) (\partial_M \alpha_{4B} - \partial_B \alpha_{4M}). \end{aligned}$$

d. Pour obtenir l'expression de $2S_{(6)}^{\text{AM}}$, d'après (VII.1) nous devons encore calculer $4U \Delta V^{\text{AM}}$.

L'équation (3), § 39, entraîne

$$4U \Delta V^{\text{AM}} = 8U[-2\partial_A U \partial_M U + 2\partial_A V \partial_M V - \delta_A^M \partial_B V \partial_B V + \delta_A^M \partial_B U \partial_B U],$$

et d'après la remarque (α_2) faite un peu plus haut :

$$(VII.6) \quad 4U \Delta V^{\text{AM}} \sim \delta_A^M [-12\partial_B U \partial_B U^2 + 24U \partial_B V \partial_B V].$$

En groupant les résultats (VII.3), (VII.5) et (VII.6), nous obtenons

$$\begin{aligned} (VII.7) \quad & \delta_A^M [2UP(4) - P(6)] + Q(6) + 4\partial_B U \partial_B V^{\text{AM}} + 4U \Delta V^{\text{AM}} \\ & \sim \delta_A^M \left[6(\partial_t U)^2 + \partial_B U \partial_B \left(2G m_s \partial_t r_s - 3 \frac{\Lambda_s^{\frac{1}{2}} + \alpha_s^{CC}}{r_s} \right) \right. \\ & \quad + 4\partial_B U \partial_t \alpha_{\frac{1}{2}B} + \frac{1}{2} \partial_B \alpha_{\frac{1}{2}C} (\partial_C \alpha_{\frac{1}{2}B} - \partial_B \alpha_{\frac{1}{2}C}) + 2\partial_B V \partial_t \alpha_{0B} \\ & \quad + \frac{1}{2} \partial_B \alpha_{0C} (\partial_B \alpha_{0C} - \partial_C \alpha_{0B}) - 2\partial_B V \partial_B \partial_t (\sqrt{G} e_s r_s) + 6\partial_B V \partial_B \frac{\Lambda_s^{\frac{1}{2}}}{r_s} \Big] \\ & \quad + \partial_A (\alpha_{\frac{1}{2}B} - \partial_B \alpha_{\frac{1}{2}A}) (\partial_M \alpha_{\frac{1}{2}B} - \partial_B \alpha_{\frac{1}{2}M}) - (\partial_A \alpha_{0B} - \partial_B \alpha_{0A}) (\partial_M \alpha_{0B} - \partial_B \alpha_{0M}) \\ & \quad + \partial_A U [-4\partial_t \alpha_{\frac{1}{2}M} - 2\partial_M \partial_t (G m_s r_s)] + \partial_M U [-4\partial_t \alpha_{\frac{1}{2}A} - 2\partial_A \partial_t (G m_s r_s)] \\ & \quad + 2\partial_A V [\partial_M \partial_t (\sqrt{G} e_s r_s) - \partial_t \alpha_{0M}] + 2\partial_M V [-\partial_t \alpha_{0A} + \partial_A \partial_t (\sqrt{G} e_s r_s)]. \end{aligned}$$

Nous posons le deuxième membre de cette égalité égal à E_M . Nous avons négligé d'écrire les signes de sommation. Il est sous-entendu que les indices B et C sont respectivement sommés de 1 à 3, et que s est sommé de 1 à N.

Nous avons donc

$$2S_{(6)}^{\text{AM}} \sim E_M + \partial_{Mt} V^{\frac{1}{2}A} + \partial_{t^2} V^{\text{AM}}.$$

Nous ne donnons pas les expressions de $\partial_{Mt} V^{\frac{1}{2}A}$ et de $\partial_{t^2} V^{\text{AM}}$, il suffit de remplacer $V^{\frac{1}{2}A}$ et V^{AM} par leurs expressions tirées de (VI.7). *A priori*, il n'y a pas de simplifications entre les termes de $\partial_{Mt} V^{\frac{1}{2}A} + \partial_{t^2} V^{\text{AM}}$ et les termes de E_M .

43. Équations de mouvement en deuxième approximation. — Après tous ces calculs intermédiaires, nous arrivons à la détermination effective de

$$\sigma_{(6)}^A \equiv \lim_{r_k \rightarrow 0} \int_{\partial C_k} S_{(6)}^M \frac{x^M - \xi_k^M}{r_k} r_k^2 \sin \theta \, d\theta \, d\varphi.$$

Dans le paragraphe précédent, les termes de $2S_{(6)}^{AM}$ susceptibles d'avoir une contribution dans les équations de mouvement, ont été mis sous la forme

$$2S_{(6)}^{AM} \sim E_M + \partial_{M^l} V^A + \partial_{l^2} V^{AM}.$$

Nous allons calculer la contribution dans les équations de mouvement des différents termes du deuxième membre.

Comme nous l'avons déjà remarqué, il est inutile d'écrire après intégration les termes de la forme $\frac{M(x^1, x^2, x^3, x^4)}{r_k}$ (M est une fonction bornée dans C_h), puisque, d'après la première propriété énoncée au paragraphe 36, ces termes ne doivent pas intervenir dans le résultat. Nous ne donnerons pas tous les calculs intermédiaires des intégrales, nous nous ramenons toujours à ceux dont les résultats ont été donnés dans l'Appendice.

α . Nous devons donc calculer

$$\lim_{r_k \rightarrow 0} \int_{\partial C_k} \sum_M \partial_{l^2} V^{AM} \frac{x^M - \xi_k^M}{r_k} r_k^2 \sin \theta \, d\theta \, d\varphi,$$

modulo des termes qui tendent vers l'infini avec $\frac{1}{r_k}$. Nous donnons la contribution des différents termes de $\partial_{l^2} V^{AM}$ tirés de (VI.7), dans le tableau suivant à deux colonnes :

<i>Termes intervenant dans</i> $\partial_{l^2} V^{AM}$.	<i>Contribution de chaque terme</i> <i>dans les équations de mouvement.</i>
$\partial_{l^2} \left(\partial_A r_k \partial_M \frac{1}{r_k} \right)$	0
$2 \delta_A^M \partial_{B l^2} r_k \tilde{\partial}_B \frac{\Lambda_q}{r_q}$	$-\frac{32\pi}{15} \xi_B^B \xi_k^A \tilde{\partial}_B \frac{\Lambda_q}{r_q} - \frac{16\pi}{15} \xi_k^B \xi_B^B \tilde{\partial}_A \frac{\Lambda_q}{r_q}$
$-2 \partial_{A l^2} r_k \tilde{\partial}_M \frac{\Lambda_q}{r_q}$	$\frac{32\pi}{15} \xi_k^A \xi_B^B \tilde{\partial}_B \frac{\Lambda_q}{r_q} + \frac{16\pi}{15} \xi_k^B \xi_B^B \tilde{\partial}_A \frac{\Lambda_q}{r_q}$
$-2 \partial_{M l^2} r_k \tilde{\partial}_A \frac{\Lambda_q}{r_q}$	$\frac{16\pi}{3} \xi_k^B \xi_B^B \tilde{\partial}_A \frac{\Lambda_q}{r_q}$
$4 \xi_k^A \xi_k^M G m_k \partial_{l^2} \frac{1}{r_k}$	$\frac{16\pi}{3} [3 \xi_k^A \xi_k^B \xi_B^B + 2 \xi_k^A \xi_B^B \xi_k^B]$

Pour simplifier l'écriture, nous avons posé

$$\Lambda_q = G m_k G m_q - G e_k e_q,$$

B est sommé de 1 à 3. q prend toutes les valeurs de 1 à N excepté la valeur k .

Dans la suite aussi, nous supposons que B et q sont sommés, sans écrire le symbole de sommation. Nous obtenons donc modulo des termes qui tendent vers l'infini avec $\frac{1}{r_k}$:

$$(VII.8) \quad \lim_{r_k \rightarrow 0} \int_{\partial C_k} \partial_{\mathbf{C}_k} V^{\mathbf{A}\mathbf{M}} \frac{x^{\mathbf{M}} - \xi_k^{\mathbf{M}}}{r_k} ds \\ \sim 16\pi (G m_k G m_q - G e_k e_q) \left[\frac{\xi_k^{\mathbf{B}} \xi_k^{\mathbf{B}}}{\xi_k^{\mathbf{A}} \xi_k^{\mathbf{A}}} \tilde{\partial}_{\mathbf{A}} \frac{1}{r_q} + \frac{\xi_k^{\mathbf{A}} \xi_k^{\mathbf{B}}}{\xi_k^{\mathbf{A}} \xi_k^{\mathbf{A}}} \tilde{\partial}_{\mathbf{B}} \frac{1}{r_q} \right].$$

b. De même, nous allons chercher la contribution de

$$\lim_{r_k \rightarrow 0} \int_{\partial C_k} \partial_{\mathbf{M}} V^{\mathbf{A}} \frac{x^{\mathbf{M}} - \xi_k^{\mathbf{M}}}{r_k} ds$$

dans les équations de mouvement. Les résultats seront encore consignés dans un tableau : $V^{\mathbf{A}}$ est exprimée dans (VI.7), $A_k^{\mathbf{A}}$ étant déterminée dans (VI.10).

*Termes intervenant
dans $V^{\mathbf{A}}$.*

$$\begin{aligned} & 2 \partial_{\mathbf{M}} \left(G m_k \xi_k^{\mathbf{A}} r_k \right) \\ & \partial_{\mathbf{M}} \left(\frac{7 (G m_k)^2 - G e_k^2}{r_k^2} \xi_k^{\mathbf{A}} \right) \\ & 2 \partial_{\mathbf{B}} r_k \tilde{\partial}_{\mathbf{B}} \frac{W_q (\xi_k^{\mathbf{A}} + \xi_q^{\mathbf{A}})}{r_q} \\ & 2 \partial_{\mathbf{B}} r_k \tilde{\partial}_{\mathbf{A}} \frac{W_q (\xi_k^{\mathbf{B}} + \xi_q^{\mathbf{B}})}{r_q} \\ & 2 \partial_{\mathbf{A}} r_k \tilde{\partial}_{\mathbf{B}} \frac{W_q (\xi_k^{\mathbf{B}} + \xi_q^{\mathbf{B}})}{r_q} \\ & [(G m_k)^2 - G e_k^2] \partial_{\mathbf{M}} \left(\partial_{\mathbf{A}} r_k \partial_{\mathbf{B}} \frac{\xi_k^{\mathbf{B}}}{r_k} \right) \\ & \partial_{\mathbf{M}} \left(\frac{2 G m_k \xi_k^{\mathbf{A}} \xi_k^{\mathbf{B}} \xi_k^{\mathbf{B}}}{r_q} \right) \\ & \partial_{\mathbf{M}} \frac{12 G m_k G m_q \xi_k^{\mathbf{A}}}{r_q r_k} \\ & \partial_{\mathbf{M}} \frac{C \xi_k^{\mathbf{A}}}{r_k} \end{aligned}$$

*Contribution de chaque terme
dans les équations de mouvement.*

$$\begin{aligned} & -16\pi G m_k \left(\frac{\xi_k^{\mathbf{B}} \xi_k^{\mathbf{B}}}{\xi_k^{\mathbf{A}} \xi_k^{\mathbf{A}}} \tilde{\partial}_{\mathbf{A}} + \frac{\xi_k^{\mathbf{A}} \xi_k^{\mathbf{B}}}{\xi_k^{\mathbf{A}} \xi_k^{\mathbf{A}}} \tilde{\partial}_{\mathbf{B}} \right) \\ & 0 \\ & \frac{16\pi}{3} W_q \frac{\xi_q^{\mathbf{A}} \xi_k^{\mathbf{B}}}{\xi_k^{\mathbf{A}} \xi_k^{\mathbf{A}}} \tilde{\partial}_{\mathbf{B}} \frac{1}{r_q} \\ & \frac{16\pi}{3} [3 G m_k G m_q - W_q \frac{\xi_k^{\mathbf{B}} \xi_k^{\mathbf{B}}}{\xi_k^{\mathbf{A}} \xi_k^{\mathbf{A}}}] \tilde{\partial}_{\mathbf{A}} \frac{1}{r_q} \\ & \frac{16\pi}{3} [3 G m_k G m_q \frac{\xi_k^{\mathbf{B}}}{\xi_k^{\mathbf{A}}} - W_q \frac{\xi_k^{\mathbf{B}}}{\xi_k^{\mathbf{A}}}] \tilde{\partial}_{\mathbf{B}} \frac{1}{r_q} \\ & 0 \\ & -8\pi G m_k \frac{d}{dt} \left(\frac{\xi_k^{\mathbf{A}} \xi_k^{\mathbf{B}} \xi_k^{\mathbf{B}}}{\xi_k^{\mathbf{A}} \xi_k^{\mathbf{A}}} \right) \\ & -48\pi G m_k G m_q \\ & \times \left[\frac{\xi_k^{\mathbf{A}}}{r_q r_k} + \xi_k^{\mathbf{A}} (\xi_k^{\mathbf{B}} - \xi_q^{\mathbf{B}}) \tilde{\partial}_{\mathbf{B}} \frac{1}{r_q} \right] \\ & -4\pi C \frac{\xi_k^{\mathbf{A}}}{\xi_k^{\mathbf{A}}} \end{aligned}$$

Pour simplifier l'écriture, nous avons posé

$$W_q = 4 G m_k G m_q - G e_k e_q,$$

d'où

$$\begin{aligned}
 \text{(VII.9)} \quad & \lim_{r_k \rightarrow 0} \int_{\partial C_k} \partial_{\mathbf{M}t} V^{\mathbf{A}} \frac{x^{\mathbf{M}} - \xi_k^{\mathbf{M}}}{r_k} ds \\
 & \sim \tilde{\sigma}_{\mathbf{B}} \frac{1}{r_q} \left[\frac{1}{3} (4 G m_k G m_q - G e_k e_q) \dot{\xi}_q^{\mathbf{A}} \dot{\xi}_k^{\mathbf{B}} \right. \\
 & \quad \left. + 4 G m_k G m_q \dot{\xi}_k^{\mathbf{A}} \dot{\xi}_q^{\mathbf{B}} + (2 G e_k e_q - 5 G m_k G m_q) \dot{\xi}_k^{\mathbf{A}} \dot{\xi}_k^{\mathbf{B}} \right] \\
 & + \tilde{\sigma}_{\mathbf{A}} \frac{1}{r_q} \left[\frac{1}{3} (G e_k e_q - 4 G m_k G m_q) \dot{\xi}_k^{\mathbf{B}} \dot{\xi}_q^{\mathbf{B}} \right. \\
 & \quad \left. + \left(\frac{3}{2} G e_k e_q - \frac{1}{2} G m_k G m_q \right) \dot{\xi}_k^{\mathbf{B}} \dot{\xi}_k^{\mathbf{B}} \right] \\
 & - \left(\frac{3 G m_k G m_q}{r_k} + \frac{\mathbf{C}}{4} \right) \ddot{\xi}_k^{\mathbf{A}}.
 \end{aligned}$$

c. Il nous reste enfin à calculer

$$\lim_{r_k \rightarrow 0} \int_{\partial C_k} E_{\mathbf{M}} \frac{x^{\mathbf{M}} - \xi_k^{\mathbf{M}}}{r_k} ds,$$

où $E_{\mathbf{M}}$ représente le deuxième membre de (VII.7) et les fonctions de t (A_s^{44} , α_s^{CC} , A_s^{04}) ont les valeurs tirées de (VI.10).

Pour simplifier l'écriture, nous poursuivrons les calculs seulement pour deux particules P_k et P_q , de masses respectives m_k et m_q et de charges respectives e_k , e_q .

Nous poserons $r = r_{qk}$.

Nous consignons la contribution de chacun des termes de $E_{\mathbf{M}}$ [cf. (VII.7)] dans les équations de mouvement, dans le tableau suivant que nous désignons par (VII.10).

TABLEAU (VII. 10).

Termes intervenant dans E_M .	Contribution de chaque terme dans les équations de mouvement.
$6 \delta_A^M (\partial_t U)^2$	$-16\pi G m_k G m_q \frac{\dot{\xi}_B \dot{\xi}_A}{\xi_q \xi_k} \tilde{\sigma}_B \frac{1}{r_q}$
$2 \delta_A^M \partial_B U (G m_s r_s) \partial_B U$	$-\frac{8\pi}{3} G m_k G m_q \tilde{\sigma}_A r_q - \frac{32\pi}{15} G m_k G m_q \tilde{\sigma}_B \frac{1}{r_q}$
$-3 \delta_A^M \partial_B U \partial_B \frac{A_s^{44} + a_s^{CC}}{r_s}$	$-\frac{16\pi}{15} G m_k G m_q \frac{\dot{\xi}_B \dot{\xi}_B}{\xi_k \xi_k} \tilde{\sigma}_A \frac{1}{r_q}$
$4 \delta_A^M \partial_B U \partial_t \alpha_{4B}$	$16\pi \left[\frac{3}{2} G m_k G m_q (\dot{\xi}_B \dot{\xi}_B + \frac{\dot{\xi}_B \dot{\xi}_B}{\xi_q \xi_q}) \right. \\ \left. - \frac{(G m_k G m_q - G e_k e_q) (G m_k + G m_q)}{r} \right] \tilde{\sigma}_A \frac{1}{r_q}$
$2 \delta_A^M \partial_B V \partial_t \alpha_{0B}$	$\frac{16\pi G m_k G m_q}{r} \left[-\frac{4}{3} \ddot{\xi}_A + \frac{4}{3} (\dot{\xi}_B \dot{\xi}_A + \frac{\dot{\xi}_B \dot{\xi}_A}{\xi_q \xi_q}) \tilde{\sigma}_B \frac{1}{r_q} \right]$
$\frac{1}{2} \delta_A^M \partial_B \alpha_{0C} (\partial_B \alpha_{0C} - \partial_C \alpha_{0B})$	$\frac{16\pi G e_q e_k}{3} \left[\frac{\ddot{\xi}_A}{r} - (\dot{\xi}_B \dot{\xi}_A + \frac{\dot{\xi}_B \dot{\xi}_A}{\xi_q \xi_q}) \tilde{\sigma}_B \frac{1}{r_q} \right]$
$+\frac{1}{2} \delta_A^M \partial_B \alpha_{4C} (\partial_C \alpha_{4B} - \partial_B \alpha_{4C})$ $- (\partial_A \alpha_{0B} - \partial_B \alpha_{0A}) (\partial_M \alpha_{0B} - \partial_B \alpha_{0M})$ $+ (\partial_A \alpha_{4B} - \partial_B \alpha_{4A}) (\partial_M \alpha_{4B} - \partial_B \alpha_{4M})$	$\frac{32\pi}{3} (4 G m_k G m_q - G e_k e_q) \left(\tilde{\sigma}_B \frac{\dot{\xi}_B \dot{\xi}_A}{\xi_k \xi_q} - \tilde{\sigma}_A \frac{\dot{\xi}_B \dot{\xi}_B}{\xi_k \xi_q} \right) \frac{1}{r_q}$

TABEAU (VII. 10) suite

Termes intervenant dans E_M .	<i>C</i> ntribution de chaque terme dans les équations de mouvement.
$-4\partial_A U \partial_t \alpha_{tA}$	$\frac{64\pi}{3} G m_k G m_q \left[\frac{\dot{\xi}_q^A}{r} - \tilde{\partial}_A \frac{\dot{\xi}_k^B \dot{\xi}_k^B}{r_q} - \tilde{\partial}_B \frac{\dot{\xi}_q^A \dot{\xi}_q^B}{r_q} \right]$
$-4\partial_M U \partial_t \alpha_{tA} - 2\partial_A U \partial_{M^2}(G m_s r_s) - 2\partial_U \partial_{A^2}(G m_s r_s)$	$16\pi G m_k G m_q \left[\frac{4\ddot{\xi}_q^A}{r} + \frac{4}{3} \tilde{\partial}_B \frac{\dot{\xi}_k^A \dot{\xi}_k^B + 3\dot{\xi}_q^A \dot{\xi}_q^B}{r_q} \right. \\ \left. + \frac{1}{6} \tilde{\partial}_{A^2} r_q + \frac{1}{3} \tilde{\partial}_A \frac{\dot{\xi}_k^B \dot{\xi}_k^B}{r} \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \tilde{\partial}_{A^2} r_q + \frac{1}{15} \tilde{\partial}_A \frac{\dot{\xi}_k^B \dot{\xi}_k^B}{r_q} \right. \\ \left. + \frac{2}{15} \tilde{\partial}_B \frac{\dot{\xi}_k^A \dot{\xi}_k^B}{r_q} \right]$
$-2\delta_A^M \partial_B V \partial_{B^2}(\sqrt{G} e_s r_s)$	$16\pi G e_k e_q \left[\frac{1}{6} \tilde{\partial}_{A^2} r_q + \frac{2}{15} \tilde{\partial}_B \frac{\dot{\xi}_k^A \dot{\xi}_k^B}{r_q} + \frac{1}{15} \partial_A \frac{\dot{\xi}_k^B \dot{\xi}_k^B}{r_q} \right]$
$2\partial_A V [\partial_{M^2}(\sqrt{G} e_s r_s) - \partial_t \alpha_{0M}] + 2\partial_M V [\partial_{A^2}(\sqrt{G} e_s r_s) - \partial_t \alpha_{0A}]$	$16\pi G e_k e_q \left[-\frac{2}{3} \frac{\ddot{\xi}_q^A}{r} - \frac{4}{3} \tilde{\partial}_{A^2} r_q - \frac{1}{15} \tilde{\partial}_A \frac{\dot{\xi}_k^B \dot{\xi}_k^B}{r_q} \right. \\ \left. + \frac{1}{3} \left(4\dot{\xi}_q^A \dot{\xi}_q^B + \frac{3}{5} \dot{\xi}_k^A \dot{\xi}_k^B \right) \tilde{\partial}_B \frac{1}{r_q} \right]$
$6\delta_A^M \partial_B V \partial_B \frac{A_{sV}^{04}}{r_s}$	$16\pi \left[\frac{\sqrt{G}}{r} (e_k - e_q) (\sqrt{G} e_q G m_k - \sqrt{G} e_k G m_q) + A \right] \tilde{\partial}_A \frac{1}{r_q}$

d. Nous obtenons les équations de mouvement en groupant les résultats obtenus en première approximation (V. 13) et en deuxième approximation [(VII. 8), (VII. 9), (VII. 10)].

Nous remplacerons $\ddot{\xi}_k^A$ et $\ddot{\xi}_q^A$ par leurs expressions tirées des équations de mouvement en première approximation :

$$G m_k \ddot{\xi}_k^A = \tilde{\partial}_A \frac{G m_k G m_q - G e_k e_q}{r_q} + O\left(\frac{1}{c^2}\right).$$

Rappelant que

$$r = \sqrt{(\xi_k^1 - \xi_q^1)^2 + (\xi_k^2 - \xi_q^2)^2 + (\xi_k^3 - \xi_q^3)^2},$$

nous remarquerons que

$$\begin{aligned} \tilde{\partial}_B \frac{1}{r_q} &= \frac{\partial}{\partial \xi_k^B} \frac{1}{r}, \\ \tilde{\partial}_A \partial_B r_q &= \frac{\partial^3 r}{\partial \xi_k^A \partial \xi_k^B \partial \xi_k^C} \xi_k^B \xi_k^C. \end{aligned}$$

Les équations de mouvement de deux particules chargées G_k et G_q peuvent alors s'écrire en deuxième approximation :

$$\begin{aligned} \text{(VII. 11)} \quad G m_k \ddot{\xi}_k^A &= G m_k G m_q \frac{\partial}{\partial \xi_k^A} \frac{1}{r} \\ &= \frac{1}{c^2} \left\{ 3 G m_k G m_q \xi_k^A \xi_q^B \right. \\ &\quad + (G e_k e_q - 4 G m_k G m_q) (\xi_q^A \xi_q^B + \xi_k^A \xi_k^B - \xi_q^A \xi_k^B) \frac{\partial}{\partial \xi_k^B} \frac{1}{r} \\ &\quad + \left[\left(G m_k G m_q + \frac{1}{2} G e_k e_q \right) \xi_k^B \xi_k^B \right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{2} G m_k G m_q \xi_q^B \xi_q^B \right. \\ &\quad \left. + (G e_k e_q - 4 G m_k G m_q) \xi_k^B \xi_q^B + A \right] \frac{\partial}{\partial \xi_k^A} \frac{1}{r} \\ &\quad + \left[- G m_k G m_q (5 G m_k + 4 G m_q) \right. \\ &\quad \left. + G e_k e_q (7 G m_k + 5 G m_q) \right. \\ &\quad \left. - G e_q^2 G m_k - G e_k^2 G m_q - \frac{(G e_q e_k)^2}{G m_q} \right] \frac{\partial}{\partial \xi_k^A} \frac{1}{r} \\ &\quad \left. + \frac{1}{c^2} (G m_k G m_q - G e_k e_q) \xi_k^B \xi_k^C \frac{\partial^3 r}{\partial \xi_k^A \partial \xi_k^B \partial \xi_k^C} \right\} + O\left(\frac{1}{c^4}\right). \end{aligned}$$

Les indices B et C sont sommés de 1 à 3.

A est une constante dépendant des conditions initiales.

Nous vérifions que pour des particules non chargées, les équations de mouvement (VII. 11) se traduisent par les équations de mouvement établies en relativité générale, d'après la méthode des singularités.

CONCLUSION.

Rappelons les résultats essentiels établis dans ce travail.

En théorie de Jordan-Thiry, nous avons défini le schéma fluide parfait, avec étude des conditions de conservation, du problème de Cauchy pour les équations de champ du cas intérieur; l'étude du problème de Cauchy a permis de mettre en évidence des variétés exceptionnelles et, en autres, des ondes hydrodynamiques dont la vitesse de propagation est celle obtenue en hydrodynamique classique par le théorème de Hugoniot.

Puis, nous nous sommes proposés la résolution des équations du champ (cas extérieur et intérieur) par une méthode d'approximation. Nous avons fait un calcul effectif en première approximation, en coordonnées isothermes, dans le schéma fluide parfait, lorsque V_s admet N domaines intérieurs à symétrie sphérique. En première approximation, nous avons démontré que γ_{0A} et γ_{04} ont un ordre différent de celui choisi par F. Hennequin.

De façon à éviter le choix du tenseur impulsion-énergie, nous avons déterminé en première approximation, le tenseur métrique satisfaisant les équations de champ du cas extérieur et les conditions d'isothermie, en supposant que le champ extérieur admet des singularités ponctuelles à symétrie sphérique. Nous avons montré qu'il est nécessaire de faire par rapport au premier calcul une hypothèse supplémentaire; ce sera par exemple :

$$\gamma_{04} = O\left(\frac{1}{c^2}\right).$$

Dans l'hypothèse de singularités ponctuelles à symétrie sphérique, le champ extérieur satisfaisant les conditions d'isothermie est alors déterminé en première approximation, à l'interprétation physique près de certaines constantes. En première approximation, les deux calculs que nous avons signalés conduisent aux mêmes solutions du champ.

Pour obtenir les équations de mouvement en théorie de Jordan-Thiry, nous avons généralisé la méthode des singularités établie en relativité générale. Nous avons appliqué cette méthode, en première approximation, dans l'hypothèse de N singularités du champ extérieur, ponctuelles à symétrie sphérique. Toujours en première approximation, nous avons repris la méthode du tenseur impulsion-énergie, déjà utilisée par F. Hennequin, dans l'hypothèse de N domaines intérieurs à symétrie sphérique. Les résultats obtenus par ces deux méthodes sont identiques et en contradiction avec les équations de mouvement de l'électromagnétisme classique.

Ce résultat inacceptable, nous a obligé à réviser l'interprétation physique de V_4 et, entre autres, le choix d'une métrique conforme.

En première approximation, nous avons vérifié que les solutions des équations du champ sont indépendantes de la métrique conforme introduite dans V_4 . Dans ce cas, les équations de mouvement sont alors indépendantes de la métrique conforme choisie. Nous avons aussi montré que, quelle que soit la métrique conforme introduite dans V_4 , il n'est pas possible d'obtenir les équations de champ de la relativité générale, dans le cas gravitationnel pur.

Ces derniers résultats, surtout celui qui concerne la première approximation des équations de mouvement, semblent nécessiter une modification des équations de champ.

Après ces résultats négatifs obtenus en théorie de Jordan-Thiry, nous nous sommes placés en théorie de Kaluza-Klein. Nous avons montré qu'en repères adaptés au groupe d'isométries, les conditions de conservation sont celles de la théorie de Jordan-Thiry, dans lesquelles il suffit de faire $\xi = 1$.

L'étude du schéma fluide parfait, du problème de Cauchy et de ses conséquences sont formellement les mêmes qu'en théorie de Jordan-Thiry. Il suffit de poser $\xi = 1$ dans les résultats obtenus.

Enfin, nous avons démontré l'équivalence des équations approchées de mouvement et des conditions approchées d'isothermie, compte tenu des équations approchées de champ; ce résultat avait été établi par F. Hennequin en théorie de Jordan-Thiry.

Les calculs effectués en première approximation, en théorie de Jordan-Thiry, ont été menés parallèlement en théorie de Kaluza-Klein. En deuxième approximation, nous nous sommes limités à la recherche d'une solution des équations du champ du cas extérieur,

en coordonnées isothermes. Nous avons supposé que le champ extérieur admet des singularités ponctuelles à symétrie sphérique; en réalité, nous avons donné seulement une forme de la solution au voisinage de chaque singularité, forme qui a été suffisante pour obtenir les équations de mouvement par la méthode des singularités.

La méthode du tenseur impulsion-énergie et la méthode des singularités s'étendent à la théorie de Kaluza-Klein.

En première approximation, les équations de mouvement établies par les deux méthodes, (en conservant les hypothèses faites en théorie de Jordan-Thiry), sont celles de l'électromagnétisme classique.

La première approximation n'apportant aucune amélioration aux résultats de la théorie classique, nous avons établi les équations de mouvement relativistes, en deuxième approximation, par la méthode des singularités.

Nous pourrions aussi établir les équations de mouvement en deuxième approximation, par la méthode du tenseur impulsion-énergie (§ 30), en utilisant le tenseur impulsion-énergie défini dans le paragraphe 7. Il est évident que nous ne retrouverions pas les mêmes résultats que par la méthode des singularités, puisque en relativité générale, les résultats obtenus par les deux méthodes étaient déjà différents.

Il semble nécessaire de calculer en deuxième approximation la solution des équations du champ (cas intérieur et extérieur) et de voir si les hypothèses formulées, soit sur les singularités du champ extérieur, soit sur les domaines intérieurs, entraînent les mêmes solutions des équations de champ ⁽¹⁾.

(1) A notre connaissance, ce travail n'a pas été fait en relativité générale.

APPENDICE

Nous nous proposons de donner ici les résultats de calculs d'intégrales dont nous avons eu besoin pour obtenir les équations de mouvement en première et deuxième approximations.

Auparavant, nous allons faire quelques remarques résultant du fait (démontré dans les deux théories pentadimensionnelles utilisées dans ce travail), que les équations de mouvement de G_k à chaque ordre d'approximation, sont indépendantes de la surface entourant G_k .

a. Nous choisissons pour surface ∂C_k entourant G_k , le bord d'un d'un voisinage de G_k homéomorphe à la sphère de E_3 (espace ponctuel euclidien à trois dimensions rapporté à un repère ortho-normé); le centre de cette sphère a pour coordonnées (ξ_k^M) et son rayon est r_k que nous ferons tendre vers zéro.

b. Dans certains calculs d'intégrales, il apparaît des termes infiniment grands du même ordre que l'infiniment grand $\frac{1}{r_k}$; nous ne les écrirons pas puisque, d'après la propriété rappelée plus haut, ces termes n'apparaîtront pas dans le résultat. Quand il en sera ainsi, le signe $\sim$ remplacera le signe $=$.

Dans ce qui suit, il sera sous entendu que toutes les intégrales sont prises sur la surface ∂C_k et que nous ferons tendre vers zéro le rayon r_k . dS désigne l'élément d'aire de ∂C_k .

Nous poserons

$$\Lambda^M = r^M - \xi_k^M,$$

$$P = \sum_{s=1}^N \frac{a_s}{r_s}, \quad Q = \sum_{s=1}^N \frac{b_s}{r_s}, \quad R = \sum_{s=1}^N \frac{c_s}{r_s},$$

a_s , b_s , c_s , dépendent seulement de t . Les indices p et q prennent respectivement toutes les valeurs de 1 à N sauf k .

$$\begin{aligned}
\int X^M dS &= \int X^A X^B X^M dS = \int X^A X^B X^C X^D X^M dS = 0, \\
\int \partial_A P \frac{X^M}{r_k} dS &= -\frac{4\pi}{3} a_k \delta_A^M, \\
\int \partial_{AB} P \frac{X^M}{r_k} dS &= 0, \\
\int \partial_{At} P \frac{X^M}{r_k} dS &= -\frac{4\pi}{3} \dot{a}_k \delta_A^M, \\
\int \partial_{\rho} P \frac{X^M}{r_k} dS &= \frac{4\pi}{3} [2 \dot{a}_k \xi_k^M + a_k \ddot{\xi}_k^M], \\
\int \partial_B P \partial_C Q \frac{X^M}{r_k} dS &= -\frac{4\pi}{3} \left[\delta_B^M \tilde{\partial}_C \frac{a_k b_q}{r_q} + \delta_C^M \tilde{\partial}_B \frac{a_q b_k}{r_q} \right], \\
\int \partial_t P \partial_A Q \frac{X^M}{r_k} dS &\sim \frac{4\pi}{3} \left[\dot{\xi}_k^M \tilde{\partial}_A \frac{a_k b_q}{r_q} + \delta_A^M \dot{\xi}_q^B \tilde{\partial}_B \frac{a_q b_k}{r_q} - \frac{\dot{a}_q b_k}{r_{qk}} \delta_A^M \right], \\
\int R \partial_A P \partial_M Q \frac{X^M}{r_k} dS &\sim \frac{4\pi}{3} \frac{c_p}{r_{pk}} \tilde{\partial}_A \frac{3 a_q b_k + a_k b_q}{r_q}, \\
\int R \partial_B P \partial_B Q \frac{X^A}{r_k} dS &\sim -\frac{4\pi}{3} \frac{c_p}{r_{pk}} \tilde{\partial}_A \frac{a_k b_q + a_q b_k}{r_q}, \\
\int X^A \partial_{BC} \left(\frac{1}{r_k} \right) \frac{X^M}{r_k} dS &= -\frac{4\pi}{15} [2 \delta_A^M \partial_B^C - 3 \delta_A^B \partial_M^C - 3 \partial_A^C \partial_B^M], \\
\int X^A \partial_{BCD} \left(\frac{1}{r_k} \right) \frac{X^M}{r_k} dS &= 0, \\
\int P \partial_{At} Q \frac{X^M}{r_k} dS &\sim \frac{4\pi}{15} b_k \left[2 \dot{\xi}_k^A \tilde{\partial}_M \frac{a_q}{r_q} - 3 \dot{\xi}_k^M \tilde{\partial}_A \frac{a_q}{r_q} \right. \\
&\quad \left. - 3 \dot{\xi}_k^B \tilde{\partial}_B \frac{a_q}{r_q} \delta_A^M \right] - \frac{4\pi}{3} \delta_A^M \dot{b}_k \frac{a_q}{r_{qk}}, \\
\int \partial_{At} (PQ) \frac{X^M}{r_k} dS &= -\frac{4\pi}{3} \frac{\delta_A^M}{r_{qk}} \frac{d}{dt} (a_q b_k + a_k b_q) \\
&\quad + 4\pi (a_q b_k + a_k b_q) \left[\frac{2}{15} \dot{\xi}_k^M \tilde{\partial}_A \frac{1}{r_q} + \frac{2}{15} \dot{\xi}_k^A \tilde{\partial}_M \frac{1}{r_q} \right. \\
&\quad \left. + \delta_A^M \tilde{\partial}_B \frac{1}{r_q} \left(\frac{1}{3} \dot{\xi}_q^B - \frac{1}{5} \dot{\xi}_k^B \right) \right], \\
\int \partial_{\rho} (PQ) \frac{X^A}{r_k} dS &= \frac{4\pi}{3} \dot{\xi}_k^A (2 a_k b_k + a_q b_k + a_k b_q) \\
&\quad + \frac{8\pi}{15} (a_q b_k + a_k b_q) \left\{ \dot{\xi}_k^A (3 \dot{\xi}_k^B - 5 \dot{\xi}_q^B) \tilde{\partial}_B \frac{1}{r_q} - \dot{\xi}_k^B \dot{\xi}_k^B \tilde{\partial}_A \frac{1}{r_q} \right\}, \\
\int \partial_{At} (\alpha r_k) \frac{X^M}{r_k} dS &= \int [3 \alpha' \partial_{At} r_k + \alpha \partial_{At} r_k] \frac{X^M}{r_k} dS, \\
\int (\partial_{BM} r_k) \frac{X^M}{r_k} dS &= \frac{8\pi}{3} \dot{\xi}_k^B, \\
\int \partial_{At} r_k \frac{X^M}{r_k} dS &= 0,
\end{aligned}$$

$$\int \partial_{\Lambda l} \frac{\alpha}{r_k^2} \frac{X^M}{r_k} dS \sim 0,$$

$$\int \partial_{\Lambda l} r_k \frac{X^M}{r_k} dS = -\frac{8\pi}{15} [2 \dot{\xi}_k^{\Lambda} \dot{\xi}_k^M + \delta_{\Lambda}^M \dot{\xi}_k^B \dot{\xi}_k^B],$$

$$\int \partial_{\Lambda l} r_k \frac{X^M}{r_k} dS = -\frac{8\pi}{5} [\ddot{\xi}_k^{\Lambda} \dot{\xi}_k^M + \dot{\xi}_k^{\Lambda} \ddot{\xi}_k^M + \delta_{\Lambda}^M \ddot{\xi}_k^B \dot{\xi}_k^B],$$

$$\int \partial_{l^2} r_k \frac{X^M}{r_k} dS = \frac{16\pi}{5} \sum_B [2 \dot{\xi}_k^M \dot{\xi}_k^B \ddot{\xi}_k^B + \ddot{\xi}_k^M \dot{\xi}_k^B \dot{\xi}_k^B],$$

$$\int \partial_{BC} r_k \partial_B P \frac{X^M}{r_k} dS = 0,$$

$$\int \partial_B P \partial_{B^2} \left(\sum_{s=1}^N b_s r_s \right) \frac{X^{\Lambda}}{r_k} dS \sim -\frac{4\pi}{3} \tilde{\partial}_{\Lambda l} (b_q r_q) - \frac{16\pi}{15} \dot{\xi}_k^{\Lambda} \dot{\xi}_k^B \tilde{\partial}_B \frac{a_q b_k}{r_q} - \frac{8\pi}{15} \dot{\xi}_k^B \dot{\xi}_k^B \tilde{\partial}_{\Lambda} \frac{a_q}{r_q},$$

$$\int \partial_M P \partial_{\Lambda l} (b_s r_s) \frac{X^M}{r_k} dS \sim -4\pi a_k \tilde{\partial}_{\Lambda l} (b_q r_q) - \frac{8\pi}{15} b_k \left[\dot{\xi}_k^B \dot{\xi}_k^B \tilde{\partial}_{\Lambda} \frac{a_q}{r_q} + 2 \dot{\xi}_k^{\Lambda} \dot{\xi}_k^M \tilde{\partial}_M \frac{a_q}{r_q} \right],$$

$$\int (\partial_l U)^2 \frac{X^{\Lambda}}{r_k} dS \sim -\frac{8\pi}{3} \tilde{\partial}_B \frac{G_{mk} G_{mq} \dot{\xi}_k^{\Lambda} \dot{\xi}_q^B}{r_q}.$$

BIBLIOGRAPHIE.

I. — Généralités en géométrie riemannienne et en relativité générale.

- [1] P. G. BERGMANN, *Introduction to the theory of Relativity*, Prentice Hall, New York, 1942.
- [2] E. CARTAN, *Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann*, Gauthier-Villars, Paris, 1946.
- [3] J. CHAZY, *La théorie de la relativité et la mécanique céleste*, Gauthier-Villars, Paris, 1930.
- [4] G. DARMOIS, *Les équations de la gravitation einsteinienne* (Mém. Sc. math., fasc. 25, 1927).
- [5] L. P. EISENHART, *Géométrie riemannienne*, Princeton, 1949.
- [6] Th. DE DONDER, *Introduction à la gravifique einsteinienne. Théorie des champs gravifiques* (Mém. Sc. math., fasc. 8, 1925 et fasc. 24, 1926).
- [7] Y. FOURÈS-BRUHAT, *Théorème d'existence pour certains systèmes d'équations aux dérivées partielles non linéaires* (Acta Math., t. 88, 1952, p. 141-225).
- [8] A. LICHNEROWICZ, *Algèbre et Analyse linéaires*, Masson, Paris, 1956.
- [9] A. LICHNEROWICZ, *Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme*, Masson, Paris, 1955.
- [10] A. LICHNEROWICZ, *Théorie globale des connexions linéaires et groupes d'holonomie*, Edizioni Gremonese, 1955.
- [11] M.-A. TONNELAT, *Les principes de la théorie électromagnétique et de la relativité*, Masson, Paris, 1959.

II. — Équations de mouvement en relativité générale.

- [12] A. EINSTEIN, L. INFELD et B. HOFFMANN, *The gravitational equations and the problem of motion*, I (Ann. Math., t. 39, 1938, p. 66-100).
- [13] A. EINSTEIN et L. INFELD, *On the motion of particles in general relativity theory* (J. Math., t. 1, 1949, p. 209-241).
- [14] V. A. FOCK, *Sur le mouvement des masses finies d'après la théorie de la gravitation einsteinienne* (J. Phys. Acad. U. R. S. S., t. 1, 1939, p. 81-116).
- [15] F. HENNEQUIN, *Étude mathématique des approximations en relativité générale et en théorie unitaire de Jordan-Thiry* (Thèse de Doctorat, Gauthier-Villars, Paris, 1958).
- [16] L. INFELD, *Bull. Acad. Pol. Sc.*, t. 2, 1954, p. 165.

- [17] L. INFELD et J. PLEBANSKI, *Motion and Relativity*, Pergamon Press, 1960.
- [18] L. INFELD et SCHILD, *On the motion of test particles in general relativity theory* (Rev. Mod. Phys., t. 21, p. 408-413).
- [19] T. LEVI-CIVITA, *The relativistic problem of several bodies* (Amer. J. Math., t. 63, 1937).
- [20] T. LEVI-CIVITA, *Le problème des n corps en relativité générale* (Mém. Sc. math., fasc. 116, 1950).
- [21] A. PAPAPETROU, *Equations of motion in general relativity*, I et II (Proc. Phys. Soc., A, t. 64, 1951, p. 57-75 et 302-310).
- [22] PETROVA, *Sur les équations de mouvement et le tenseur matériel pour des systèmes de masses finies en relativité générale* (J. Phys. exp. et theor. Akad. Math., t. 39, 1938, p. 101-104).
- [23] PHAM TAN HOANG, *La méthode des singularités pour les équations du mouvement en relativité générale et en théorie du champ unifié* (Thèse de Doctorat, Paris, 1957).
- [24] PHAM TAN HOANG, *Comparaison des deux méthodes d'obtention des équations de mouvements en relativité générale* (Cahiers de Physique, n° 98, octobre 1958).

III. — Les théories pentadimensionnelles.

- [25] P. G. BERGMANN, *Unified field with fifteen field variables* (Ann. Math., t. 2, n° 49, 1948, p. 255-264).
- [26] A. EINSTEIN et P. BERGMANN, *Generalisation of Kaluza's theory of Electricity* (Ann. Math., t. 2, n° 39, 1938, p. 683).
- [27] F. HENNEQUIN, *Étude mathématique des approximations en relativité générale et en théorie unitaire de Jordan-Thiry* (Thèse de Doctorat, Gauthier-Villars, Paris, 1958).
- [28] P. JORDAN, *Über die feldgleichungen der gravitation bei variabler gravitatione constante* (Z. Naturforschung, t. 20, 1947).
- [29] KALUZA, *Zum unitats problem der Physik, sitz ber Breuss, Akad. Wiss.*, 1921, p. 966.
- [30] C. KLEIN, *Quantentheorie und funfdimensionen Relativitats theorie* (Z. Physik, t. 37, 1926, p. 895).
- [31] LEUTWYLER, *Sur une modification des théories pentadimensionnelles destinée à éviter certaines difficultés de la théorie de Jordan-Thiry* (C. R. Acad. Sc., t. 251, 1960, p. 2292-2294).
- [32] A. LICHNEROWICZ, *Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme*, Masson, Paris, 1954.
- [33] P. PIGEAUD, *Contribution à l'étude des approximations en théorie unitaire pentadimensionnelle de Jordan-Thiry* (Thèse de Doctorat, Paris, 1962).

- [34] A. SURIN, *C. R. Acad. Sc.*, t. 247, 1958, p. 2304-2306; t. 248, 1959, p. 1476-1478; t. 249, 1959, p. 2279-2281; t. 250, 1960, p. 1805-1807; t. 251, 1960, p. 2295-2296; t. 253, 1961, p. 2326-2328.
- [35] Y. THIRY, *Étude mathématique des équations d'une théorie unitaire à quinze variables de champ* [*J. Math. pures et appl. (Thèse)*, Gauthier-Villars, Paris, 1950].
- [36] R. VALLÉE, *Sur l'hydrodynamique en théorie de Jordan-Thiry* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 248, 1959, p. 1779-1781).
-

TABLE DES MATIÈRES.

	Pages.
INTRODUCTION.....	I
NOTATIONS.....	7
PREMIÈRE PARTIE.	
THÉORIE DE JORDAN-THIRY.	
CHAPITRE I. — <i>Fondements de la théorie pentadimensionnelle de Jordan-Thiry</i>	9
1. La variété riemannienne V_5	9
2. Repère naturel adapté au groupe d'isométries.....	10
3. Variété riemannienne V_4 . Tenseur champ électromagnétique.....	11
4. Équations de champ dans V_5	12
5. Théorie provisoire de l'électromagnétisme en relativité générale....	13
6. Traduction dans V_4 des équations de champ du cas unitaire extérieur de V_5 . Interprétation physique.....	14
CHAPITRE II. — <i>Étude du schéma fluide parfait : équations de champ, problème de Cauchy, conditions de conservation traduites dans V_4</i>	18
7. Traduction dans V_4 des équations de champ du cas unitaire intérieur. Définition du schéma fluide parfait pentadimensionnel.....	18
8. Conditions de conservation de V_5 dans le schéma fluide parfait....	24
9. Rappels des principes relatifs au problème de Cauchy dans le cas unitaire extérieur.....	25
10. Problème de Cauchy dans le cas unitaire intérieur, schéma fluide parfait.....	27
11. Variétés exceptionnelles mises en évidence par le problème de Cauchy. Ondes hydrodynamiques. Vitesse de propagation.....	31
12. Invariance de r , l et v_λ par le groupe d'isométries.....	33
13. Prolongement à travers une hypersurface Σ d'un $d\sigma^2$ intérieur dans le schéma fluide parfait, en un $d\sigma^2$ extérieur et inversement..	34
14. Lemme préliminaire.....	35
15. Identités et conditions de conservation de V_5 traduites dans V_4	38
16. Conditions de conservation dans le schéma fluide parfait.....	41
CHAPITRE III. — <i>Résolution des équations approchées de champ. Calcul effectif en première approximation</i>	42
17. Hypothèses sur le tenseur métrique.....	43
18. Solution globale des équations approchées de champ, en coordonnées isothermes.....	44

	Pages.
19. Solution des équations approchées de champ du cas extérieur et des conditions approchées d'isothermie.....	47
20. Calcul en première approximation des développements limites des $\gamma^{\alpha\beta}$ connaissant ceux des $\gamma_{\alpha\beta}$	48
21. Expression du tenseur impulsion-énergie du schéma fluide parfait, en première approximation.....	49
22. Équations de champ, en première approximation, en coordonnées isothermes et dans le schéma fluide parfait. Développements limités en première approximation de $\Gamma^{\alpha\beta}$, $\gamma^{\alpha\beta}$ et $\gamma_{\alpha\beta}$	50
23. Détermination en première approximation des développements limités de $\Gamma^{\alpha\beta}$ satisfaisant les équations de champs du cas extérieur et les conditions d'isothermie.....	55
CHAPITRE IV. — <i>Étude des équations de mouvement en théorie de Jordan-Thiry. Détermination effective en première approximation.....</i>	61
24. Exposé de la méthode des singularités dans une théorie généralisant celle de Jordan-Thiry.....	61
25. Application de la méthode précédente au cas où le champ extérieur possède N singularités ponctuelles, à symétrie sphérique.....	70
26. Calcul de certaines intégrales.....	71
27. Premier groupe d'équations de mouvement en première approximation.....	73
28. Calcul de $SA_{(4)}^M$, en coordonnées quelconques.....	74
29. Deuxième groupe d'équations de mouvement, en première approximation.....	76
30. Équations de mouvement, en première approximation, par la méthode du tenseur impulsion-énergie.....	78
31. Interprétation de V_4 comme variété espace-temps de la relativité générale.....	85

DEUXIÈME PARTIE.

THÉORIE DE KALUZA-KLEIN.

CHAPITRE V. — <i>Théorie de Kaluza-Klein. Équations de champ. Équations de mouvement.....</i>	89
32. Théorie de Kaluza-Klein.....	89
33. Conditions de conservation.....	90
34. Solution globale des équations approchées de champ, en coordonnées isothermes. Rôle des conditions d'isothermie.....	91
35. Solution des équations approchées de champ du cas extérieur et des conditions approchées d'isothermie. Résultats en première approximation.....	93
36. Équations de mouvement obtenues par la méthode des singularités. Résultats en première approximation.....	95
37. Équations de mouvement par la méthode du tenseur impulsion-énergie. Résultats en première approximation.....	98
CHAPITRE VI. — <i>Calcul en deuxième approximation d'une solution des équations approchées du champ du cas extérieur et des conditions approchées d'isothermie.....</i>	98

	Pages.
38. Développements limités à la deuxième approximation de $\gamma_{\alpha\beta}$, $\gamma^{\alpha\beta}$ correspondant à ceux de $\Gamma^{\alpha\beta}$	98
39. Équations de champ du cas extérieur en coordonnées isothermes, en deuxième approximation.....	100
40. Calcul d'une solution des équations de champ.....	101
<i>a.</i> Choix de la solution des équations de champ satisfaisant l'hypothèse de singularités ponctuelles présentant la symétrie sphérique.....	101
<i>b.</i> Solutions particulières de certaines équations de Laplace avec second membre.....	101
<i>c.</i> Solution effective des équations de champ en deuxième approximation.....	104
41. Détermination des fonctions de t , $A_k^{\alpha\beta}$	106
CHAPITRE VII. — <i>Deuxième approximation des équations de mouvement par la méthode des singularités</i>	
42. Calcul de $S_{(6)}^M$ en coordonnées quelconques.....	110
43. Équations de mouvement en deuxième approximation.....	118
CONCLUSION.....	125
APPENDICE. <i>Résultats de calculs d'intégrales</i>	128
BIBLIOGRAPHIE.....	131
TABLE DES MATIÈRES.....	135

DEUXIÈME THÈSE



PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ



Groupes d'holonomie

Vu et approuvé :

Paris, le 7 décembre 1962.

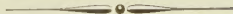
LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES

Marc ZAMANSKY.

Vu et permis d'imprimer :

LE RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,

Jean ROCHE.



PARIS — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS & C^{ie}

QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55

164616-65

Dépôt légal, Imprimeur, 1965, n° 1689.

Imprimé en France

PARIS — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS & C^{ie}
QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55

164616-65

Dépôt légal, Imprimeur, 1965, n° 1689.

Imprimé en France